

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DIEGO CADENA DE ALMEIDA

**ANÁLISE ISOGOMÉTRICA BASEADA NO USO DAS T-SPLINES APLICADA A
PROBLEMAS DA ELASTICIDADE LINEAR BIDIMENSIONAL**

CURITIBA

2017

DIEGO CADENA DE ALMEIDA

**ANÁLISE ISOGOMÉTRICA BASEADA NO USO DAS T-SPLINES APLICADA A
PROBLEMAS DA ELASTICIDADE LINEAR BIDIMENSIONAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ciências, Área de Concentração: Mecânica Computacional.

Orientador: Prof. Roberto Dalledone Machado, D.Eng.

Coorientador: Prof. Marcos Arndt, D.Sc.

CURITIBA

2017

AL447a

Almeida, Diego Cadena de

Análise isogeométrica baseada no uso das T-splines aplicada a problemas da elasticidade linear bidimensional / Diego Cadena de Almeida. – Curitiba, 2017.

167 f. : il. color. ; 30 cm.

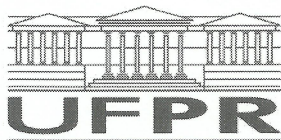
Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, 2017.

Orientador: Roberto Dalledone Machado.

Coorientador: Marcos Arndt.

1. Análise Isogeométrica. 2. NURBS. 3. T-splines. 4. Extração de Bézier. I. Universidade Federal do Paraná. II. Machado, Roberto Dalledone. III. Arndt, Marcos. IV. Título.

CDD: 006.6

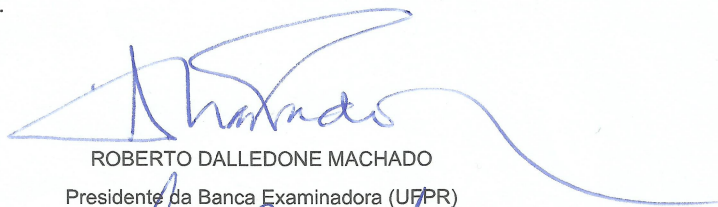


TERMO DE APROVAÇÃO

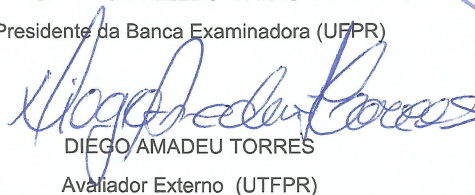
Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **DIEGO CADENA DE ALMEIDA** intitulada: **ANÁLISE ISOGEMÉTRICA BASEADA NO USO DAS T-SPLINES APLICADA A PROBLEMAS DA ELASTICIDADE LINEAR BIDIMENSIONAL**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

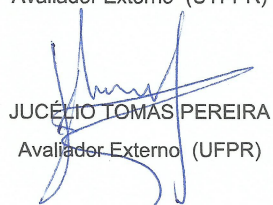
Curitiba, 15 de Setembro de 2017.



ROBERTO DALLEDONE MACHADO
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)



DIEGO AMADEU TORRES
Avaliador Externo (UTFPR)



JUCÉLIO TOMAS PEREIRA
Avaliador Externo (UFPR)

Dedico à minha esposa, Amanda.

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal do Paraná por me abrir as portas e ceder um espaço para que eu pudesse ter a oportunidade de desenvolver este trabalho.

Ao CESEC/UFPR e ao PPGMNE/UFPR pelo acolhimento e por tudo aquilo que me proporcionaram para a realização desta dissertação.

À CAPES pelo apoio financeiro que foi de fundamental importância durante todo o período do mestrado.

Ao meu orientador, Professor Roberto Dalledone Machado, por acreditar que eu pudesse desenvolver este trabalho, pela paciência e pelos momentos de incentivo que me fizeram seguir em frente.

Ao meu coorientador, Professor Marcos Arndt, pelo apoio e pelas sugestões que contribuíram para este trabalho.

Ao colega Mateus Rauen, que sempre me auxiliou quando precisei e cuja dissertação serviu de inspiração para a criação deste trabalho.

À todos os professores do PPGMNE/UFPR que contribuíram para a minha formação.

Aos meus pais, José Carlos e Marli de Fatima, por todo o esforço despendido para que eu pudesse chegar até aqui. À minha irmã, Michelle, por todo o incentivo e apoio.

À minha esposa, Amanda, que é uma das pessoas mais importantes na minha vida e esteve ao meu lado em todos os momentos dessa caminhada.

RESUMO

Neste trabalho é estudada a Análise Isogeométrica (AIG) baseada no uso das T-splines aplicada a problemas da elasticidade linear bidimensional. Para auxiliar na implementação do método é feito o uso de uma técnica denominada de estruturação de dados baseado na extração de Bézier. Além disso, o *software* Rhino é utilizado em conjunto com um *plugin* que, além de permitir a aplicação das T-splines dentro do próprio *software*, torna possível a obtenção dos dados necessários para as análises numéricas. A AIG baseada nas T-splines é aplicada em problemas de chapas sob tração, no problema de uma viga circular com deslocamento prescrito e no problema de uma barragem sob pressões hidrostáticas. As taxas de convergências das soluções desses problemas são analisadas e também são comparadas com os resultados obtidos via Análise Isogeométrica baseada em NURBS, via Método dos Elementos Finitos, e para o caso da barragem, através do *software* ABAQUS. Concluindo o trabalho, são apresentadas as vantagens e desvantagens encontradas nessas análises quanto ao uso das T-splines.

Palavras-chaves: Análise Isogeométrica. NURBS. T-splines. Extração de Bézier.

ABSTRACT

In this work Isogeometric Analysis (IGA) based on T-splines applied to two dimensional elasticity problems is studied. For the method implementation a technique called data structures based on Bézier extraction is used. Moreover, the Rhino software is used in conjunction with a plugin that, besides allowing the application of T-splines within the software, makes it possible to obtain the necessary data to numerical analysis. The IGA based on T-splines is applied to the problems of a plates under tension, a circular beam with prescribed displacement and a dam under hydrostatic pressures. The solution convergence rate are analyzed and compared with results obtained by Isogeometric Analysis based on NURBS, by Finite Element Method, and for the dam case, by software ABAQUS. Concluding this work, the advantages and disadvantages about the use of T-splines found in this analysis are presented.

Key-words: Isogeometric Analysis. NURBS. T-splines. Bézier Extraction.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – POLINÔMIOS DE BERNSTEIN.	29
FIGURA 2 – CURVA DE BÉZIER (LINHA SÓLIDA), POLÍGONO DE CONTROLE (LINHA TRACEJADA) E PONTOS DE CONTROLE (PONTOS). . . .	29
FIGURA 3 – REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DE UM CÍRCULO PELO MEF E PELA AIG.	31
FIGURA 4 – EXEMPLO DE FUNÇÕES B-SPLINES DE GRAU 3 DEFINIDAS PARA O VETOR $\Xi = [0, 0, 0, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1, 1, 1]$	36
FIGURA 5 – EXEMPLO DE FUNÇÕES B-SPLINES DE GRAU 3 DEFINIDAS PARA O VETOR $\Xi = [0, 0, 0, 0, 0.2, 0.4, 0.4, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1, 1, 1]$	37
FIGURA 6 – a) CURVA B-SPLINE, PONTOS DE CONTROLE E POLÍGONO DE CONTROLE. b) FUNÇÕES B-SPLINES DE GRAU 2 GERADAS COM O VETOR DE NÓS $\Xi = [0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1]$ UTILIZADAS PARA A OBTENÇÃO DA CURVA $C(\xi)$	39
FIGURA 7 – a) SUPERFÍCIE B-SPLINE, PONTOS DE CONTROLE E POLÍGONO DE CONTROLE. b) FUNÇÕES B-SPLINES DE GRAU 2 GERADAS A PARTIR DOS VETORES DE NÓS $\Xi = [0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1]$ e $H = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, UTILIZADAS PARA GERAÇÃO DA SUPERFÍCIE APRESENTADA EM a).	41
FIGURA 8 – UM CÍRCULO EM \mathbb{R}^2 CONSTRUÍDO A PARTIR DA TRANSFORMAÇÃO PROJETIVA DE UMA B-SPLINE QUADRÁTICA EM \mathbb{R}^3	42
FIGURA 9 – MALHA FÍSICA E MALHA DE CONTROLE.	46
FIGURA 10 – UM <i>KNOT SPAN</i> E SEU MAPEAMENTO DO ESPAÇO PARAMÉTRICO PARA O ESPAÇO FÍSICO.	47
FIGURA 11 – a) MALHA FÍSICA FORMADA POR UM ÚNICO <i>PATCH</i> . b) MALHA FÍSICA COMPOSTA POR DOIS <i>PATCHES</i>	47
FIGURA 12 – MALHA FÍSICA FORMADA POR DOIS ELEMENTOS (Ω^1 E Ω^2) REPRESENTADA NO ESPAÇO FÍSICO (À ESQUERDA) E MALHA DE CONTROLE (À DIREITA), SEPARADA DA MALHA FÍSICA PARA MELHOR VISUALIZAÇÃO.	48
FIGURA 13 – EXEMPLO DE UM ESPAÇO INDICIAL	48
FIGURA 14 – a) SUPORTE DA FUNÇÃO \tilde{N}_1 NO ESPAÇO PARAMÉTRICO. b) SUPORTE DA FUNÇÃO \tilde{N}_6 NO ESPAÇO PARAMÉTRICO.	49
FIGURA 15 – COORDENADAS NURBS E NUMERAÇÃO GLOBAL DAS FUNÇÕES NO ESPAÇO INDICIAL.	50
FIGURA 16 – a) ESQUEMA DE NUMERAÇÃO GLOBAL DAS FUNÇÕES NO ESPAÇO PARAMÉTRICO.	52

FIGURA 17 – a) EXEMPLO DE NUMERAÇÃO GLOBAL E NUMERAÇÃO LOCAL DAS FUNÇÕES.	52
FIGURA 18 – EXEMPLO DE ESPAÇO PARAMÉTRICO.	53
FIGURA 19 – DOMÍNIO DE INTEGRAÇÃO.	54
FIGURA 20 – MAPEAMENTOS.	54
FIGURA 21 – a) CURVA ORIGINAL E FUNÇÕES B-SPLINES. b) CURVA E FUNÇÕES APÓS A INSERÇÃO DE NÓS.	56
FIGURA 22 – a) CURVA ORIGINAL E FUNÇÕES B-SPLINE GERADAS A PARTIR DO VETOR DE NÓS $\Xi = [0,0,0,1,1,1]$. b) CURVA E FUNÇÕES APÓS A APLICAÇÃO DO REFINAMENTO P, RESULTANDO NO VETOR DE NÓS $\Xi = [0,0,0,0,1,1,1]$	57
FIGURA 23 – REFINAMENTO K. a) FUNÇÕES B-SPLINES PARA $p = q = 1$ E $\Xi = [0,0,1,1]$. b) ELEVAÇÃO DA ORDEM DAS FUNÇÕES RESULTANDO EM $p = q = 2$ E $\Xi = [0,0,0,1,1,1]$. c) INSERÇÃO DE NÓ RESULTANDO EM $p = q = 2$ E $\Xi = [0,0,0,0.5,1,1,1]$	58
FIGURA 24 – EXEMPLO DE UMA T-MALHA. a) T-MALHA REPRESENTADA NO ESPAÇO INDICIAL. b) T-MALHA REPRESENTADA NO ESPAÇO PARAMÉTRICO.	59
FIGURA 25 – a) ÂNCORAS S_α E S_β PARA FUNÇÕES DE GRAU ÍMPAR. b) ESQUEMA PARA OBTENÇÃO DOS VETORES DE NÓS LOCAIS CORRESPONDENTES À ÂNCORA S_α . c) ESQUEMA PARA OBTENÇÃO DO VETORES DE NÓS LOCAIS CORRESPONDENTES À ÂNCORA S_β	61
FIGURA 26 – a) ÂNCORAS S_α E S_β PARA FUNÇÕES DE GRAU PAR. b) ESQUEMA PARA OBTENÇÃO DOS VETORES DE NÓS LOCAIS CORRESPONDENTES À ÂNCORA S_α . c) ESQUEMA PARA OBTENÇÃO DOS VETORES DE NÓS LOCAIS CORRESPONDENTES À ÂNCORA S_β	61
FIGURA 27 – FUNÇÃO N_3 (EM VERMELHO) OBTIDA A PARTIR DO VETOR DE NÓS ESTENDIDO Ξ_{EST} . EM TRACEJADO AS FUNÇÕES QUE NÃO SÃO CONSIDERADAS.	62
FIGURA 28 – a) T-MALHA REPRESENTADA NO ESPAÇO INDICIAL. b) T-MALHA REPRESENTADA NO ESPAÇO PARAMÉTRICO. c) SUPORTE D_α DA FUNÇÃO R_α . d) LINHAS QUE REPRESENTAM A CONTINUIDADE REDUZIDA DO SUPORTE D_α . e) LINHAS DE CONTINUIDADE REDUZIDAS PARA TODAS AS FUNÇÕES.	64
FIGURA 29 – a) T-MALHA REPRESENTADA NO ESPAÇO INDICIAL. b) T-MALHA REPRESENTADA NO ESPAÇO FÍSICO.	65
FIGURA 30 – a) LINHAS DE CONTINUIDADE REDUZIDA. b) ELEMENTOS DE ÁREA NÃO NULA UTILIZADOS PARA O PROCESSO DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.	65

FIGURA 31 – T-MALHA REPRESENTADA NO ESPAÇO FÍSICO.	66
FIGURA 32 – a) FUNÇÃO T-SPLINE RELACIONADA À ÂNCORA S_{18} . b) FUNÇÃO T-SPLINE RELACIONADA À ÂNCORA S_{25}	66
FIGURA 33 – EXIBIÇÃO DOS T-ELEMENTOS NA SUPERFÍCIE T-SPLINE BICÚBICA REPRESENTADA NO ESPAÇO FÍSICO (À ESQUERDA) E A T-MALHA (À DIREITA) SEPARADA DA SUPERFÍCIE PARA MELHOR VISUALIZAÇÃO.	67
FIGURA 34 – ILUSTRAÇÃO ESQUEMÁTICA DAS FUNÇÕES QUE POSSUEM SUPORTE NO ELEMENTO 16.	67
FIGURA 35 – A) CURVA E FUNÇÕES B-SPLINES PARA O VETOR DE NÓS $\Xi = [0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1]$. B) CURVA E FUNÇÕES B-SPLINE PARA O VETOR DE NÓS $\Xi = [0, 0, 0, 0.25, 0.25, 0.5, 0.5, 0.75, 0.75, 1, 1, 1]$	69
FIGURA 36 – a) FUNÇÕES B-SPLINES. b) DECOMPOSIÇÃO EM ELEMENTOS DE BÉZIER.	71
FIGURA 37 – MALHA DE CONTROLE NURBS, MALHA DE CONTROLE DE BÉZIER E MALHA FÍSICA DE BÉZIER.	74
FIGURA 38 – ELEMENTO DE BÉZIER (ELEMENTO DESTACADO EM CINZA) NO ESPAÇO PARAMÉTRICO DAS B-SPLINES. INFORMAÇÃO USADA PARA CONSTRUÇÃO DA MATRIZ LEN	74
FIGURA 39 – DOMÍNIO DA FUNÇÃO T-SPLINE N_{18}	75
FIGURA 40 – a) FUNÇÃO B-SPLINE N_2 (LINHA SÓLIDA). b) DECOMPOSIÇÃO EM ELEMENTOS DE BÉZIER.	75
FIGURA 41 – a) FUNÇÃO B-SPLINE M_3 (LINHA SÓLIDA). b) DECOMPOSIÇÃO EM ELEMENTOS DE BÉZIER.	76
FIGURA 42 – PROBLEMA DE UMA CHAPA QUADRADA TRACIONADA NO LADO ESQUERDO E ENGASTADA NO LADO DIREITO.	88
FIGURA 43 – MALHA FÍSICA E NÓS DOS ELEMENTOS REFERENTES À FEM-Q16-REF.1:1. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.	89
FIGURA 44 – MALHA FÍSICA E PONTOS DE CONTROLE (CÍRCULOS) REFERENTES À AIG-NURBS-G3-CLÁSSICA-REF.1:1 E À AIGB-NURBS-G3-REF.1:1. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.	89
FIGURA 45 – T-MALHA NO ESPAÇO FÍSICO E PONTOS DE CONTROLE (QUADRADOS) REFERENTES À AIGB-TSPLINE-1, EXTRAÍDOS DO <i>SOFTWARE</i> RHINO. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.	89
FIGURA 46 – ENERGIA DE DEFORMAÇÃO <i>VERSUS</i> NÚMERO TOTAL DE GRAUS DE LIBERDADE PARA O PROBLEMA DA CHAPA QUADRADA.	90

FIGURA 47 – ERRO RELATIVO NA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO <i>VERSUS</i> NÚMERO TOTAL DE GRAUS DE LIBERDADE PARA O PROBLEMA DA CHAPA QUADRADA.	90
FIGURA 48 – TENSÕES NA CHAPA QUADRADA. a) σ_x . b) σ_y . c) τ_{xy} . d) VON MISES.	91
FIGURA 49 – DESLOCAMENTOS NA CHAPA QUADRADA. a) DIREÇÃO X. b) DIREÇÃO Y.	92
FIGURA 50 – PROBLEMA DE UMA VIGA CIRCULAR COM DESLOCAMENTO PRESCRITO.	92
FIGURA 51 – ERRO RELATIVO NA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO <i>VERSUS</i> NÚMERO TOTAL DE GRAUS DE LIBERDADE PARA O PROBLEMA DA VIGA CIRCULAR.	93
FIGURA 52 – MALHA FÍSICA E NÓS DOS ELEMENTOS REFERENTES À FEM-Q16-REF.1:1. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.	94
FIGURA 53 – MALHA FÍSICA E NÓS DOS ELEMENTOS REFERENTES À FEM-Q16-REF.1:2. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.	94
FIGURA 54 – MALHA FÍSICA E PONTOS DE CONTROLE (CÍRCULOS) REFERENTES À AIG-NURBS-G3-REF.1:1. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.	95
FIGURA 55 – MALHA FÍSICA E PONTOS DE CONTROLE (CÍRCULOS) REFERENTES À AIG-NURBS-G3-REF.1:2. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.	95
FIGURA 56 – MALHA FÍSICA E PONTOS DE CONTROLE (CÍRCULOS) REFERENTES À AIG-NURBS-G3-REF.NU. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.	95
FIGURA 57 – T-MALHA NO ESPAÇO FÍSICO E PONTOS DE CONTROLE (QUADRADOS) REFERENTES À AIGB-TSPLINE-1, EXTRAÍDOS DO <i>SOFTWARE</i> RHINO. a) MALHA INICIAL. b) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.	96
FIGURA 58 – T-MALHA NO ESPAÇO FÍSICO E PONTOS DE CONTROLE (QUADRADOS) REFERENTES À AIGB-TSPLINE-2, EXTRAÍDOS DO <i>SOFTWARE</i> RHINO. a) MALHA INICIAL. b) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.	96
FIGURA 59 – a) T-MALHA APÓS O 4º REFINAMENTO, EXTRAÍDA DO <i>SOFTWARE</i> RHINO, REFERENTE À AIGB-TSPLINE-1. b) T-ELEMENTOS/ELEMENTOS DE BÉZIER CORRESPONDENTES À T-MALHA APRESENTADA EM a).	97

FIGURA 60 – a) T-MALHA APÓS O 3º REFINAMENTO, EXTRAÍDA DO <i>SOFTWARE</i> RHINO, REFERENTE À AIGB-TSPLINE-2. b) T-ELEMENTOS/ELEMENTOS DE BÉZIER CORRESPONDENTES À T-MALHA APRESENTADA EM a).	97
FIGURA 61 – ERRO RELATIVO NA NORMA EM ENERGIA <i>VERSUS</i> NÚMERO TOTAL DE GRAUS DE LIBERDADE PARA O PROBLEMA DA VIGA CIRCULAR.	98
FIGURA 62 – TENSÕES NA VIGA CIRCULAR CORRESPONDENTES. a) σ_x . b) σ_y . c) τ_{xy} . d) VON MISES.	100
FIGURA 63 – DESLOCAMENTOS NA VIGA CIRCULAR. a) DIREÇÃO X. b) DIREÇÃO Y.	101
FIGURA 64 – a) CHAPA COM FURO CIRCULAR SOB TRAÇÃO. b) REGIÃO REPRESENTATIVA DO PROBLEMA.	102
FIGURA 65 – MALHA FÍSICA E NÓS DOS ELEMENTOS REFERENTES À FEM-Q16-REF.1:1. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.	102
FIGURA 66 – MALHA FÍSICA E NÓS DOS ELEMENTOS REFERENTES À FEM-Q16-REF.1:2. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.	103
FIGURA 67 – MALHA FÍSICA E PONTOS DE CONTROLE (CÍRCULOS) REFERENTES À AIG-NURBS-G3-REF.1:1. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.	103
FIGURA 68 – MALHA FÍSICA E PONTOS DE CONTROLE (CÍRCULOS) REFERENTES À AIG-NURBS-G3-REF.1:2. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.	103
FIGURA 69 – MALHA FÍSICA E PONTOS DE CONTROLE (CÍRCULOS) REFERENTES À AIG-NURBS-G3-REF.NU. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.	104
FIGURA 70 – T-MALHA NO ESPAÇO FÍSICO E PONTOS DE CONTROLE (QUADRADOS) REFERENTES À AIGB-TSPLINE-1, EXTRAÍDOS DO <i>SOFTWARE</i> RHINO. a) MALHA INICIAL. b) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.	104
FIGURA 71 – T-MALHA NO ESPAÇO FÍSICO E PONTOS DE CONTROLE (QUADRADOS) REFERENTES À AIGB-TSPLINE-2, EXTRAÍDOS DO <i>SOFTWARE</i> RHINO.. a) MALHA INICIAL. b) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.	105
FIGURA 72 – a) T-MALHA APÓS O 4º REFINAMENTO, EXTRAÍDA DO <i>SOFTWARE</i> RHINO, REFERENTE À AIGB-TSPLINE-1. b) T-ELEMENTOS/ELEMENTOS DE BÉZIER CORRESPONDENTES À T-MALHA APRESENTADA EM a).	105

FIGURA 73 – a) T-MALHA APÓS O 4º REFINAMENTO, EXTRAÍDA DO SOFTWARE RHINO, REFERENTE À AIGB-TSPLINE-2 b) T-ELEMENTOS/ELEMENTOS DE BÉZIER CORRESPONDENTES À T-MALHA APRESENTADA EM a).	106
FIGURA 74 – ERRO RELATIVO NA NORMA EM ENERGIA <i>VERSUS</i> NÚMERO TOTAL DE GRAUS DE LIBERDADE PARA O PROBLEMA DA CHAPA COM FURO CIRCULAR.	107
FIGURA 75 – TENSÕES NA CHAPA COM FURO CIRCULAR. a) σ_x . b) σ_y . c) τ_{xy} . d) VON MISES.	109
FIGURA 76 – DESLOCAMENTOS NA CHAPA COM FURO CIRCULAR. a) DIREÇÃO x. b) DIREÇÃO y.	109
FIGURA 77 – PROBLEMA DE UMA CHAPA EM L TRACIONADA.	110
FIGURA 78 – MALHA FÍSICA E NÓS DOS ELEMENTOS REFERENTES À FEM-Q16-REF.1:1. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.	111
FIGURA 79 – MALHA FÍSICA E PONTOS DE CONTROLE (CÍRCULOS) REFERENTES À AIG-NURBS-G3-REF.1:1. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.	111
FIGURA 80 – MALHA FÍSICA E PONTOS DE CONTROLE (CÍRCULOS) REFERENTES À AIG-NURBS-G3-REF.NU. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.	111
FIGURA 81 – T-MALHA NO ESPAÇO FÍSICO E PONTOS DE CONTROLE (QUADRADOS) REFERENTES À AIGB-TSPLINE-1, EXTRAÍDOS DO SOFTWARE RHINO. a) MALHA INICIAL. b) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.	112
FIGURA 82 – a) T-MALHA APÓS O 4º REFINAMENTO, EXTRAÍDA DO SOFTWARE RHINO, REFERENTE À AIGB-TSPLINE-1. b) T-ELEMENTOS/ELEMENTOS DE BÉZIER CORRESPONDENTES À T-MALHA APRESENTADA EM a).	112
FIGURA 83 – ENERGIA DE DEFORMAÇÃO <i>VERSUS</i> NÚMERO TOTAL DE GRAUS DE LIBERDADE PARA O PROBLEMA DA CHAPA EM L.	113
FIGURA 84 – ERRO RELATIVO NA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO <i>VERSUS</i> NÚMERO TOTAL DE GRAUS DE LIBERDADE PARA O PROBLEMA DA CHAPA EM L.	113
FIGURA 85 – TENSÕES NA CHAPA EM L. a) σ_x . b) σ_y . c) τ_{xy} . d) VON MISES. . . .	115
FIGURA 86 – DESLOCAMENTOS NA CHAPA EM L. a) DIREÇÃO X. b) DIREÇÃO Y. . . .	115
FIGURA 87 – PROBLEMA DE UMA BARRAGEM SOB PRESSÕES HIDROSTÁTICAS.	116
FIGURA 88 – MALHA ADAPTATIVA REFERENTE À ANÁLISE REALIZADA NO SOFTWARE ABAQUS. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O QUARTO REFINAMENTO.	117

FIGURA 89 – T-MALHA NO ESPAÇO FÍSICO E PONTOS DE CONTROLE (QUADRADOS) REFERENTES À AIGB-TSPLINE-1, EXTRAÍDOS DO <i>SOFTWARE</i> RHINO. a) MALHA INICIAL. b) MALHA APÓS O TERCEIRO REFINAMENTO.	117
FIGURA 90 – T-MALHA NO ESPAÇO FÍSICO E PONTOS DE CONTROLE (QUADRADOS) REFERENTES À AIGB-TSPLINE-2, EXTRAÍDOS DO <i>SOFTWARE</i> RHINO. a) MALHA INICIAL. b) MALHA APÓS O QUARTO REFINAMENTO.	118
FIGURA 91 – a) T-ELEMENTOS/ELEMENTOS DE BÉZIER CORRESPONDENTE A T-MALHA APRESENTADA NA FIGURA 89b. b) T-ELEMENTOS/ELEMENTOS DE BÉZIER CORRESPONDENTE A T-MALHA APRESENTADA NA FIGURA 90b.	118
FIGURA 92 – DESLOCAMENTOS NA DIREÇÃO X DA FACE DA BARRAGEM QUE RECEBE AS PRESSÕES HIDROSTÁTICAS.	119
FIGURA 93 – DESLOCAMENTOS NA DIREÇÃO Y DA FACE DA BARRAGEM QUE RECEBE AS PRESSÕES HIDROSTÁTICAS.	119
FIGURA 94 – DESLOCAMENTOS NA DIREÇÃO X. a) ABAQUS b) AIGB-TSPLINE-2.	120
FIGURA 95 – DESLOCAMENTOS NA DIREÇÃO Y. a) ABAQUS b) AIGB-TSPLINE-2.	120
FIGURA 96 – FORMA DEFORMADA DO PROBLEMA DA BARRAGEM, ESCALADA 5000 VEZES, REFERENTE À AIG-TSPLINE-2.	121
FIGURA 97 – ERRO RELATIVO NA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO <i>VERSUS</i> O NÚMERO TOTAL DE GRAUS DE LIBERDADE PARA O PROBLEMA DA BARRAGEM.	121
FIGURA 98 – DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES σ_y . a) ABAQUS. b) AIGB-TSPLINE-2.	122
FIGURA 99 – CORPO CONTÍNUO.	133
FIGURA 100–DIAGRAMA DE CORPO LIVRE EM FORMA DE TETRAEDRO. . . .	134
FIGURA 101–COMPONENTES DE TENSÃO.	136
FIGURA 102–CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR.	136
FIGURA 103–CONDIÇÕES DE CONTORNO E FORÇAS DE CORPO APLICADAS A UM CORPO BIDIMENSIONAL.	139
FIGURA 104–a) CHAPA INFINITA COM FURO CIRCULAR SOB TENSÃO. b) PARTE SIMÉTRICA COM CONDIÇÕES GEOMÉTRICAS E MECÂNICAS DE CONTORNO.	142
FIGURA 105–DOMÍNIO DE INTEGRAÇÃO.	144
FIGURA 106–MAPEAMENTO AFIM.	144
FIGURA 107–ESQUEMA DE DEPENDÊNCIA DAS FUNÇÕES B-SPLINES. . . .	145
FIGURA 108–FUNÇÕES B-SPLINES NA DIREÇÃO ξ	148
FIGURA 109–FUNÇÕES B-SPLINES NA DIREÇÃO η	148
FIGURA 110–DERIVADAS DAS FUNÇÕES B-SPLINES COM RESPEITO A ξ	148

FIGURA 111–DERIVADAS DAS FUNÇÕES B-SPLINES COM RESPEITO A η	149
FIGURA 112–FUNÇÃO NURBS R_{33}	150
FIGURA 113– RELAÇÃO ENTRE A NUMERAÇÃO GLOBAL E A NUMERAÇÃO LOCAL DAS FUNÇÕES PARA O ELEMENTO 01.	155
FIGURA 114–MALHA E PONTOS DE CONTROLE. FUNÇÕES NURBS DE GRAU 4, 760 PONTOS DE CONTROLE, 512 ELEMENTOS.	157
FIGURA 115–a) SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS TENSÕES NORMAIS NA DIREÇÃO X. b) SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS TENSÕES NORMAIS NA DIREÇÃO X.	157
FIGURA 116–a) SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS TENSÕES NORMAIS NA DIREÇÃO Y. b) SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS TENSÕES NORMAIS NA DIREÇÃO Y.	158
FIGURA 117–a) SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS TENSÕES TANGENCIAIS NA DIRE- ÇÃO XY. b) SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS TENSÕES TANGENCIAIS NA DIREÇÃO XY.	158
FIGURA 118–a) SOLUÇÃO ANALÍTICA DOS DESLOCAMENTOS NA DIREÇÃO X. b) SOLUÇÃO NUMÉRICA DOS DESLOCAMENTOS NA DIREÇÃO X.	158
FIGURA 119–a) SOLUÇÃO ANALÍTICA DOS DESLOCAMENTOS NA DIREÇÃO Y. b) SOLUÇÃO NUMÉRICA DOS DESLOCAMENTOS NA DIREÇÃO Y.	159
FIGURA 120–a) FUNÇÃO $\tilde{R}_{3,3}$. b) FUNÇÃO $\tilde{R}_{2,3}$. c) FUNÇÃO $\tilde{R}_{2,2}$	159
FIGURA 121–CONVERSÃO DE CURVAS PARA T-SPLINES.	161
FIGURA 122–PONTOS DE CONTROLE.	161
FIGURA 123–NUMERAÇÃO DOS PONTOS DE CONTROLE.	162
FIGURA 124–INTERVALO DE NÓS.	162
FIGURA 125–ELEMENTOS DE BÉZIER.	163
FIGURA 126–PONTOS DE CONTROLE DOS ELEMENTOS DE BÉZIER.	163
FIGURA 127–NUMERAÇÃO DOS PONTOS DE CONTROLE DE BÉZIER.	164
FIGURA 128–ARQUIVO DE SAÍDA.	164
FIGURA 129–DADOS DO ARQUIVO DE SAÍDA: PARTE 1.	165
FIGURA 130–DADOS DO ARQUIVO DE SAÍDA: PARTE 2.	165
FIGURA 131–DADOS DO ARQUIVO DE SAÍDA: PARTE 3.	166
FIGURA 132–DADOS DO ARQUIVO DE SAÍDA: PARTE 4.	167

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – DADOS DA MATRIZ DE CONECTIVIDADE INC	50
TABELA 2 – DADOS DA MATRIZ DE CONECTIVIDADE IEN	53
TABELA 3 – DADOS DA MATRIZ DE CONECTIVIDADE IEN RELACIONADO AO ELEMENTO 16	68
TABELA 4 – VALORES DO ERRO RELATIVO NA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO DIFERENTES GDL'S PARA AS ANÁLISES AIGB- CLÁSSICA-G3-REF. 1:1, AIGB-NURBS-G3-REF. 1:1 , AIGB-TSPLINE- 1 E FEM-Q16-REF.1:1 DO PROBLEMA DA CHAPA QUADRADA. . .	91
TABELA 5 – VALORES DO ERRO RELATIVO NA NORMA EM ENERGIA CONSI- DERANDO DIFERENTES GDL'S PARA AS ANÁLISES FEM-Q16-REF.1:1 E FEM-Q16-REF.1:2 DO PROBLEMA DA VIGA CIRCULAR.	99
TABELA 6 – VALORES DO ERRO RELATIVO NA NORMA EM ENERGIA CONSI- DERANDO DIFERENTES GDL'S PARA AS ANÁLISES AIGB-NURBS- G3-REF.1:1 E AIGB-NURBS-G3-REF.1:2 DO PROBLEMA DA VIGA CIRCULAR.	99
TABELA 7 – VALORES DO ERRO RELATIVO NA NORMA EM ENERGIA CONSI- DERANDO DIFERENTES GDL'S PARA A ANÁLISE AIGB-NURBS-G3- REF.NU DO PROBLEMA DA VIGA CIRCULAR.	99
TABELA 8 – VALORES DO ERRO RELATIVO NA NORMA EM ENERGIA CONSI- DERANDO DIFERENTES GDL'S PARA AS ANÁLISES AIGB-TSPLINE-1 EAIGB-TSPLINE-2 DO PROBLEMA DA VIGA CIRCULAR.	100
TABELA 9 – VALORES DO ERRO RELATIVO NA NORMA DE ENERGIA CONSI- DERANDO DIFERENTES GDL'S PARA AS ANÁLISES FEM-Q16-REF.1:1 E FEM-Q16-REF.1:2 DO PROBLEMA DA CHAPA COM FURO CIRCU- LAR.	107
TABELA 10 – VALORES DO ERRO RELATIVO NA NORMA EM ENERGIA CONSI- DERANDO DIFERENTES GDL'S PARA AS ANÁLISES AIGB-NURBS- G3-REF.1:1 E AIGB-NURBS-G3-REF.1:2 DO PROBLEMA DA CHAPA COM FURO CIRCULAR.	108
TABELA 11 – VALORES DO ERRO RELATIVO NA NORMA EM ENERGIA CONSI- DERANDO DIFERENTES GDL'S PARA A ANÁLISE AIGB-NURBS-G3- REF.NU DO PROBLEMA DA CHAPA COM FURO CIRCULAR.	108
TABELA 12 – VALORES DO ERRO RELATIVO NA NORMA EM ENERGIA CONSI- DERANDO DIFERENTES GDL'S PARA AS ANÁLISES AIGB-TSPLINE-1 EAIGB-TSPLINE-2 DO PROBLEMA DA CHAPA COM FURO CIRCULAR.	108

TABELA 13 – VALORES DO ERRO NA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO DIFERENTES GDL'S PARA AS ANÁLISES FEM-Q16-REF.1:1 DO PROBLEMA DA CHAPA EM L.	114
TABELA 14 – VALORES DO ERRO NA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO DIFERENTES GDL'S PARA AS ANÁLISES AIGB-NURBS-G3-REF.1:1 E AIGB-NURBS-G3-REF.NU DO PROBLEMA DA CHAPA EM L.	114
TABELA 15 – VALORES DO ERRO NA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO DIFERENTES GDL'S PARA AS ANÁLISES AIGB-TSPLINE-1 DO PROBLEMA DA CHAPA EM L.	114
TABELA 16 – VALORES DO ERRO RELATIVO NA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO DIFERENTES GDL'S PARA A ANÁLISE REALIZADA ATRAVÉS DO SOFTWARE ABAQUS PARA O PROBLEMA DA BARRAGEM.	122
TABELA 17 – VALORES DO ERRO RELATIVO NA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO DIFERENTES GDL'S PARA AS ANÁLISES AIGB-TSPLINE-1 E AIGB-TSPLINE-2 PARA O PROBLEMA DA BARRAGEM.	122
TABELA 18 – PONTOS DE CONTROLE	143
TABELA 19 – PESOS	143
TABELA 20 – FUNÇÕES E DERIVADAS CALCULADAS PARA ξ_o	147
TABELA 21 – FUNÇÕES E DERIVADAS CALCULADAS PARA η_o	148
TABELA 22 – FUNÇÕES NURBS	149
TABELA 23 – DERIVADAS DAS FUNÇÕES NURBS COM RESPEITO A ξ	151
TABELA 24 – DERIVADAS DAS FUNÇÕES NURBS COM RESPEITO A η	151
TABELA 25 – DERIVADAS DAS FUNÇÕES NURBS EM RELAÇÃO A X	153
TABELA 26 – DERIVADAS DAS FUNÇÕES NURBS EM RELAÇÃO A Y	153
TABELA 27 – RELAÇÃO ENTRE A NUMERAÇÃO GLOBAL E LOCAL DAS FUNÇÕES.	155

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AIG	- Análise Isogeométrica
CAD	- <i>Computer-Aided Design</i>
CAE	- <i>Computer-Aided Engineering</i>
CAM	- <i>Computer-Aided Manufacturing</i>
MEF	- Método dos Elementos Finitos
NURBS	- <i>Non-Uniform Rational B-Splines</i>
XFEM	- <i>Extended Finite Element Method</i>
XIGA	- <i>Extended Isogeometric Analysis</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

A	- numeração global das funções
a	- numeração local das funções
\mathbf{B}, \mathbf{B}^e	- matrizes contendo as derivadas parciais das funções NURBS
$\mathbf{B}(\check{\xi}), \mathbf{B}(\check{\xi}, \check{\eta})$	- vetores contendo os polinômios de Bernstein
$B_{a,p}$	- polinômios de Bernstein
B_α	- produto tensorial entre as funções N_α e M_α
$\mathbf{C}(\xi)$	- curvas B-splines/NURBS
$\mathbf{C}(\check{\xi})$	- curvas de Bézier
\mathbf{C}, \mathbf{C}^e	- operadores de extração de Bézier
\mathbf{D}	- matriz das relações constitutivas
\mathbf{d}	- vetor global de deslocamentos
E	- módulo de elasticidade do material
e	- elemento
$(e_E)_{rel}$	- erro relativo na norma em energia
$(e_U)_{rel}$	- erro relativo na energia de deformação
$\ e_E\ $	- erro na norma em energia
\mathbf{F}, \mathbf{F}^e	- vetores das forças externas
\mathbf{f}	- vetor das forças de corpo
$\mathbf{IEN}, \mathbf{INC}$	- matrizes de conectividade
$\mathbf{J}, \mathbf{J}_{x,\xi}, \mathbf{J}_{\xi,\xi}$	- matrizes Jacobianas
\mathbf{K}, \mathbf{K}^e	- matrizes de Rigidez
$M_{j,q}(\eta)$	- função B-spline obtida a partir do vetor de nós H
M_α	- função B-spline usada para cálculo das T-splines
m	- número de funções na direção paramétrica η

$N_{i,p}(\xi)$	- função B-spline obtida a partir do vetor de nós Ξ
$\tilde{N}_A(\xi, \eta)$	- produto tensorial de funções B-splines
N_α	- função B-spline usada para cálculo das T-splines
n	- número de funções na direção paramétrica ξ
n_{np}	- número de pontos de controle ou número de funções base
n_{en}	- número de funções que possuem suporte no elemento e
n_{el}	- número de elementos
$n_{gp\xi}$	- quantidade de pontos de Gauss na direção ξ
$n_{gp\eta}$	- quantidade de pontos de Gauss na direção η
\mathbf{P}_α	- pontos de controle para cálculo das superfícies T-splines
$\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_{i,j}$	- pontos de controle para cálculo das curvas B-spline/NURBS
\mathbf{P}_a	- Pontos de controle para cálculo da curva de Bézier
p	- grau das funções na direção paramétrica ξ
q	- grau das funções na direção paramétrica η
\mathbf{R}^e	- matriz que contém as funções de forma
$R_i^p(\xi)$	- função racional de uma variável (ξ)
$R_{ij}^{p,q}(\xi, \eta)$	- função racional de duas variáveis (ξ e η)
R_α	- função racional para cálculo das funções T-splines
$\mathbf{S}(\xi, \eta)$	- superfície B-spline/NURBS/T-splines
\mathbf{s}_α	- âncora no espaço indicial
$\bar{\mathbf{t}}$	- vetor das forças de superfícies
\mathbf{t}_α	- âncora no espaço paramétrico
U, \hat{U}	- energia de deformação
\mathbf{u}, \mathbf{u}^e	- vetores dos deslocamentos
$\hat{\mathbf{u}}^e$	- funções tentativas
u_x	- deslocamento na direção normal x

u_y	- deslocamento na direção normal y
$\ u_E\ $	- norma em energia da solução analítica
$\mathbf{w}, \mathbf{w}^e, \hat{\mathbf{w}}^e$	- vetores das funções peso
$W(\xi), W(\xi, \eta)$	- funções peso
w_{ij}	- pesos relativos aos pontos de controle
$w_{gp\xi}$	- pesos associados aos pontos de Gauss na direção ξ
$w_{gp\eta}$	- pesos associados aos pontos de Gauss na direção η
\mathbf{X}	- mapeamento entre o espaço paramétrico e o espaço físico
\mathbf{X}^{-1}	- mapeamento entre o espaço físico e o espaço paramétrico
α	- índice referente a âncora
γ_{xy}	- deformação tangencial
ϵ	- vetor de deformação
ϵ_{xx}	- deformação na direção normal x
ϵ_{yy}	- deformação na direção normal y
H	- vetor de nós na direção η
H_α	- vetor de nós local na direção η relacionado à âncora $\mathbf{s}_\alpha, \mathbf{t}_\alpha$
η	- coordenada paramétrica no espaço paramétrico
η_j	- nó pertencente ao vetor de nós H
$\tilde{\eta}$	- coordenada paramétrica do domínio de integração
ν	- coeficiente de Poisson
Ξ	- vetor de nós na direção ξ
Ξ_α	- vetor de nós local na direção ξ relacionado à âncora $\mathbf{s}_\alpha, \mathbf{t}_\alpha$
ξ	- coordenadas paramétricas no espaço paramétrico
ξ_i	- nó pertencente ao vetor de nós Ξ
$\check{\xi}$	- coordenada paramétrica para cálculo dos polinômios de Bernstein.
$\tilde{\xi}$	- coordenada paramétrica do domínio de integração

σ	vetor de tensões
σ_{xx}	- tensão na direção normal x
σ_{yy}	- tensão na direção normal y
τ_{xy}	- tensão tangencial
Φ	- mapeamento entre o domínio de integração e o espaço paramétrico
Φ^{-1}	- mapeamento entre o espaço paramétrico e o domínio de integração
Ω	- espaço físico
$\hat{\Omega}$	- domínio paramétrico
$\tilde{\Omega}$	- domínio de integração
Ω^e	- elemento pertencente ao espaço físico
$\hat{\Omega}^e$	- elemento pertencente ao domínio paramétrico
$\tilde{\Omega}^e$	- elemento pertencente ao domínio de integração

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	25
1.1 OBJETIVO GERAL	26
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	26
1.3 JUSTIFICATIVA	26
1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO	27
2 REVISÃO DA LITERATURA	28
2.1 CURVAS E SUPERFÍCIES	28
2.2 ANÁLISE ISOGOMÉTRICA	30
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DA ANÁLISE ISOGOMÉTRICA	35
3.1 FUNÇÕES B-SPLINES	35
3.1.1 Vetor de nós	35
3.1.2 Funções base B-splines	36
3.1.3 Derivada de uma função B-spline	38
3.1.4 Curvas B-splines	38
3.1.5 Superfícies B-spline	40
3.2 NURBS	42
3.2.1 Transformação Projetiva	42
3.2.2 Funções base NURBS	43
3.2.3 Derivadas das funções NURBS	44
3.2.4 Curvas NURBS	45
3.2.5 Superfície NURBS	45
3.3 ANÁLISE ISOGOMÉTRICA	46
3.3.1 Malha física e malha de controle	46
3.3.2 Elementos	47
3.3.3 Espaço físico	48
3.3.4 Espaço Indicial	48
3.3.5 Matriz INC	49
3.3.6 Matriz IEN	50
3.3.7 Espaço paramétrico	53
3.3.8 Domínio de Integração	53
3.3.9 Mapeamento	54
3.4 REFINAMENTOS	55
3.4.1 Inserção de nós	55
3.4.2 Refinamento p	56

3.4.3 Refinamento k	57
3.5 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA BASEADA NO USO DAS T-SPLINES	58
3.5.1 T-malha	58
3.5.2 Espaço indicial e Espaço paramétrico	59
3.5.3 Ancoragem	59
3.5.4 Vetores de nós locais	59
3.5.5 Vetor de intervalo de nós local	62
3.5.6 Vetor de nós estendido	62
3.5.7 Funções T-splines	63
3.5.8 Continuidade	63
3.5.9 Exemplo de uma superfície T-spline bicúbica	64
3.6 ESTRUTURAÇÃO DE DADOS BASEADA NA EXTRAÇÃO DE BÉZIER	68
3.6.1 Decomposição de Bézier	68
3.6.2 Operador de Extração de Bézier	69
3.6.3 NURBS em termos de elementos de Bézier	72
3.6.4 Malha de Controle de Bézier	73
3.7 EXTRAÇÃO DE BÉZIER PARA T-SPLINES	74
3.7.1 Operador de Extração de Bézier para T-splines	74
 4 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA APLICADA A PROBLEMAS DA ELASTICIDADE	
 LINEAR	79
4.1 DISCRETIZAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS	79
4.2 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	82
4.3 EXTRAÇÃO DE BÉZIER NA FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS	84
4.4 AVALIAÇÃO DA CONVERGÊNCIA DAS SOLUÇÕES	85
 5 RESULTADOS	86
5.1 CHAPA QUADRADA	88
5.2 VIGA CIRCULAR	92
5.3 CHAPA COM FURO CIRCULAR	101
5.4 CHAPA EM L	110
5.5 BARRAGEM	116
 6 CONCLUSÕES	124
 REFERÊNCIAS	127

APÊNDICES

132

APÊNDICE A FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE ELASTICIDADE LINEAR . .	133
A.1 FORMULAÇÃO FORTE DO PROBLEMA	133
A.1.1 Vetor tensão	133
A.1.2 Equações de equilíbrio	136
A.1.3 Formulação Forte	139
A.2 FORMULAÇÃO FRACA	140
 APÊNDICE B EXEMPLO DE CÁLCULO PELO MÉTODO DA AIG	 142
B.1 DADOS	143
B.2 DOMÍNIO DE INTEGRAÇÃO	144
B.3 MAPEAMENTO AFIM	144
B.4 FUNÇÕES BASE B-SPLINES E DERIVADAS	145
B.5 FUNÇÕES NURBS	149
B.6 DERIVADAS DAS FUNÇÕES NURBS COM RESPEITO ÀS COORDENADAS PARAMÉTRICAS	150
B.7 DERIVADAS DAS FUNÇÕES NURBS COM RESPEITO ÀS COORDENADAS DO ESPAÇO FÍSICO	151
B.8 JACOBIANO	153
B.9 MATRIZ DE RIGIDEZ	154
B.10 RESULTADO FINAL	157
 APÊNDICE C RHINO 3D	 160
C.1 RHINO 5	160
C.2 AUTODESK T-SPLINES PLUG-IN FOR RHINO V4	160
C.3 EXEMPLO DE APLICAÇÃO NA AIG	160
C.3.1 Conversão de NURBS para T-splines	160
C.3.2 Pontos de Controle	161
C.3.3 Intervalo de nós	162
C.3.4 Elementos de Bézier	162
C.3.5 Arquivo de Saída	164

1 INTRODUÇÃO

O computador se tornou um instrumento imprescindível nos mais diversos campos da engenharia. O avanço tecnológico dos computadores permitiu que engenheiros pudessem resolver problemas, os quais geralmente envolvem uma grande quantidade de variáveis, de maneira cada vez mais rápida, precisa e acurada. Além disso, para a elaboração de projetos ou para o atendimento das demandas das indústrias, diversos *softwares* são utilizados para o auxílio dessas atividades, sendo que os principais podem ser classificados nas seguintes categorias: CAD (sigla em inglês para Desenho Assistido por Computador), CAM (sigla em inglês para Manufatura Assistida por Computador) e CAE (sigla em inglês para Engenharia Assistida por Computador).

Os *softwares* CAD são geralmente utilizados por projetistas e desenhistas para modelagem geométrica, os *softwares* CAM estão presentes nas indústrias para o auxílio na manufatura de produtos e os *softwares* CAE são utilizados por engenheiros para a avaliação de problemas em diversas áreas como, por exemplo, mecânicas dos sólidos e mecânica dos fluídos. Nessa categoria de *softwares* CAE, empregam-se métodos numéricos para a análise de problemas físicos, entre eles, um método que é amplamente utilizado é o Método dos Elementos Finitos (MEF). Muitos dos dados utilizados nesses sistemas computacionais são comuns uns aos outros e por isso muitos dos *softwares* dessas classes são integrados entre si a fim de facilitar a transferência de informações entre eles.

Nessa linha de raciocínio, no ano de 2005 pesquisadores propuseram um método para estreitar ainda mais a relação entre os sistemas CAD e CAE, método que foi denominado de Análise Isogeométrica (AIG) (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005). Apesar de *softwares* comerciais já proporcionarem essa integração, fazendo com que os desenhos produzidos nos sistemas CAD sejam transferidos diretamente para os sistemas CAE para geração de malhas, percebeu-se na indústria a necessidade de melhoria de alguns procedimentos, entre eles, a grande parcela de tempo despendida na geração de malhas complexas e algumas limitações encontradas na comunicação entre os sistemas CAD e CAE. Com base nisso, visando atender essa demanda, os pesquisadores sugeriram a aplicação das funções NURBS, que são amplamente empregadas nos sistemas CAD, na formulação em elementos finitos para a aproximação de problemas governados por equações diferenciais, sendo esse o princípio da Análise Isogeométrica.

As funções NURBS são usadas nos *softwares* CAD para geração de formas geométricas. Na AIG, essas funções são utilizadas para aproximação dos campos de interesse de algum problema, como por exemplo, o campo de deslocamentos. Diversas vantagens no uso das NURBS foram percebidas, sendo uma delas a utilização da geometria exata do problema em todas as etapas da análise.

Além das funções NURBS, a Análise Isogeométrica permite que outras funções comuns aos sistemas CAD sejam empregadas, como é o caso das funções T-splines. As T-splines são uma generalização das funções NURBS e apresentam algumas melhorias como, por exemplo, a possibilidades de refinamentos locais nas malhas.

A AIG foi testada com sucesso em diversos problemas da mecânica dos sólidos, mecânica dos fluídos, vibração de estruturas, condução de calor, entre outros, e se mostrou uma técnica muito promissora. Dessa forma, a AIG despertou o interesse na comunidade científica e abriu espaço para o desenvolvimento de inúmeras outras pesquisas.

Neste trabalho é realizado um estudo a respeito da Análise Isogeométrica, sendo esse método aplicado em alguns problemas da elasticidade linear bidimensional, os quais envolvem as condições do estado plano de tensões e do estado plano de deformações. Além da aplicação da Análise Isogeométrica baseada no uso das T-splines, para confrontar os resultados obtidos, também são realizadas análises via AIG baseada em NURBS e via Método dos Elementos Finitos.

1.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo deste trabalho é aplicar a Análise Isogemétrica baseada nas T-splines em problemas da elasticidade linear bidimensional.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Estudar a aplicação da Análise Isogeométrica baseada nas NURBS e T-splines.

Utilizar a estruturação de dados baseado na extração de Bézier a fim de facilitar a implementação dos algoritmos.

Comparar as aplicações da AIG baseada nas T-splines, AIG baseada nas NURBS e do Método dos Elementos Finitos através de exemplos numéricos envolvendo a elasticidade linear bidimensional.

1.3 JUSTIFICATIVA

A Análise Isogeométrica é mais uma opção encontrada para a solução de problemas físicos governados por equações diferenciais. O método se destaca na tentativa de integrar ainda mais as áreas CAD e CAE que estão presentes no dia a dia dos engenheiros. Devido ao grande potencial já mostrado e por ser uma criação relativamente recente, a Análise Isogeométrica é uma área que merece destaque e que ainda pode ser muito explorada. Com base no exposto, procura-se neste trabalho estudar algumas aplicações desse método e também, de alguma forma, contribuir para essa área de estudo.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho segue a seguinte estrutura: No capítulo 2, é apresentada uma revisão da literatura a respeito da Análise Isogeométrica (AIG). Inicia-se com uma breve perspectiva histórica sobre curvas e superfícies e a conexão dessas áreas com a origem da AIG. Posteriormente, são discutidos os principais estudos relacionados a este trabalho e as linhas de pesquisa mais recentes. No capítulo 3, é exposta a fundamentação teórica da Análise Isogeométrica baseada no uso das NURBS e das T-splines. Também, é discutida a aplicação da estruturação de dados baseados na extração de Bézier na AIG. No capítulo 4, são apresentados alguns conceitos relativos à elasticidade linear, às equações governantes do problema e à discretização do problema. Por último, ainda nesse capítulo, trata-se da avaliação dos erros numéricos. No capítulo 5, têm-se os resultados numéricos obtidos com a aplicação da AIG baseada nas NURBS, AIG baseada nas T-splines e o Método dos Elementos Finitos. Por fim, no capítulo 6, são apresentadas as conclusões finais do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo é apresentada uma revisão da literatura a respeito da Análise Isogeométrica (AIG). Com o objetivo de se compreender melhor as funções NURBS, inicia-se com uma breve abordagem histórica sobre o começo dos estudos de curvas e superfícies até a origem das NURBS. Posteriormente, faz-se a conexão dessa área com o surgimento da AIG. Por fim, elencam-se os principais estudos relacionados ao presente trabalho e também as linhas de pesquisas mais recentes.

2.1 CURVAS E SUPERFÍCIES

Na área do estudo de curvas, grandes avanços vieram da indústria aeronáutica. Em 1944, Roy Liming percebeu a importância de relacionar curvas traçadas manualmente com números e algoritmos. Seu trabalho se difundiu na década de 1950 e influenciou diversas empresas americanas desse setor. Também nos anos 50, foram dados os primeiros passos para o desenvolvimento da área conhecida como CAD (*Computer Aided Design*). Nos anos de 1960 e 1970, inúmeros notáveis pesquisadores e cientistas também colaboraram para o pioneirismo e avanço dessas áreas (ROGERS, 2001) (FARIN, 2002).

Dentre os que colaboraram, dois nomes merecem grande destaque: o do matemático Paul de Faget de Casteljau e o do engenheiro Piérre Bézier. Ambos desenvolveram seus trabalhos junto à indústria automobilística na França durante a década de 1960. Paul de Faget de Casteljau, trabalhando para a empresa Citroën, elaborou um sistema para geração de curvas e superfícies que eram definidas com o uso dos polinômios de Bernstein e introduziu o chamado polígono de controle. Além disso, também desenvolveu o que mais tarde ficou conhecido como algoritmo de Casteljau. Piérre Bézier, trabalhando para a empresa Renault, também propôs uma alternativa para substituir o traçado manual de curvas. Bézier, inicialmente, representou curvas utilizando a interseção de dois cilindros. Depois, utilizou formulações polinomiais e conseguiu representar curvas de grau mais elevado (FARIN, 2002). Percebeu-se, mais tarde, que os polinômios de Bézier tinham muitas semelhanças com os polinômios de Bernstein e isso levou à representação das curvas de Bézier em termos dos polinômios de Bernstein, semelhante à forma apresentada por Casteljau (RABUT, 2002) (FORREST, 1990). Para um melhor entendimento, uma breve definição das curvas de Bézier pode ser vista na sequência.

Como apresentado em Piegl e Tiller (1996), os polinômios de Bernstein são definidos da seguinte forma:

$$B_{a,p}(\xi) = \frac{p!}{a!(p-a)!} \xi^a (1-\xi)^{p-a}, \quad \xi \in [0,1] \quad (2.1)$$

onde p é o grau do polinômio, a o número de polinômios e ξ a variável independente.

Um exemplo dos polinômios de Bernstein obtidos pela expressão (2.1), considerando $a = 7$ e $p = 6$, pode ser visto na FIGURA 1.

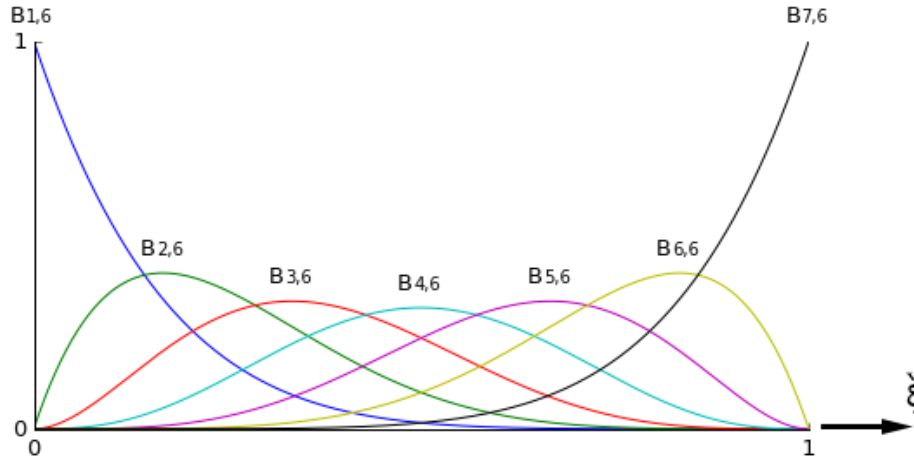


FIGURA 1 – POLINÔMIOS DE BERNSTEIN.
FONTE: O autor (2017).

Definidos os polinômios de Bernstein, uma curva de Bézier de grau p é definida por:

$$C(\xi) = \sum_{a=1}^p B_{a,p}(\xi) \mathbf{P}_a, \quad \xi \in [0,1] \quad (2.2)$$

onde $B_{a,p}$ são os polinômios de Bernstein e \mathbf{P}_a os pontos de controle. Um exemplo de curva de Bézier, gerada com o uso dos polinômios de Bernstein apresentados na FIGURA 1, pode ser visto na FIGURA 2.

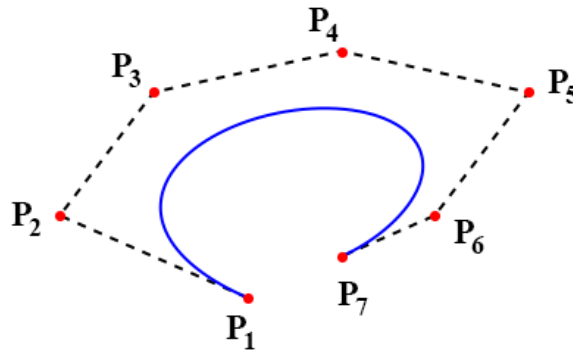


FIGURA 2 – CURVA DE BÉZIER (LINHA SÓLIDA), POLÍGONO DE CONTROLE (LINHA TRACEJADA) E PONTOS DE CONTROLE (PONTOS).

FONTE: O autor (2017).

Uma outra alternativa encontrada ao uso das curvas de Bézier foi o surgimento das curvas B-splines. Segundo Rogers (2001), em 1974, Rich Riensenfeld foi um dos responsáveis por adotar as B-splines como funções base para definição de curvas. As B-splines, por sua vez, foram introduzidas por Isaac Schoenberg, como pode ser visto em seu trabalho iniciado em 1945 e publicado em 1966 com colaboração de Haskell Curry (CURRY; SCHOENBERG, 1966).

A generalização das funções B-splines foi estudada, inicialmente, por Ken Versprille em 1975. Foi denominada de *non-uniform rational B-splines* e ficou conhecida mais tarde como NURBS. As NURBS tiveram uma aceitação muito positiva nos sistemas CAD e CAM, sendo bastante utilizadas para geração de formas geométricas, principalmente, pelo fato de tornarem viáveis a obtenção de formas geométricas que não são possíveis com o uso das B-splines (FARIN, 2002).

Mais tarde, Sederberg et al. (2003) sugeriram a generalização das superfícies NURBS, denominada de T-splines, que surgiu com uma série de vantagens em relação às NURBS, como, por exemplo, a possibilidade de refinamentos locais e a necessidade de um menor número de pontos de controle para a definição de uma mesma superfície.

O amplo uso de *softwares* computacionais CAD e CAM, como, Rhino (Robert Mcneel & Associados, 2017) e, mais atualmente, Fusion 360 (Autodesk Inc., 2017), despertou o interesse de pesquisadores em estreitar cada vez mais a relação dessas áreas com o Método dos Elementos Finitos (MEF) (SZABÓ; BABUŠKA, 1991) (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2013). O MEF, muito empregado nos sistemas CAE, se desenvolveu paralelamente ao sistemas CAD e CAM, porém, em muitas ocasiões essas ferramentas são usadas conjuntamente. O desejo de melhorar a integração dessas áreas motivou a criação do método denominado de Análise Isogeométrica (AIG).

2.2 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA

O conceito da Análise Isogeométrica (AIG) foi, inicialmente, introduzido por Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005). Com o intuito de melhorar a representação da geometria nas análises computacionais e também de estreitar a ligação entre os sistemas CAD e CAE, os autores propuseram um método no qual utilizam-se as NURBS, funções que são amplamente utilizadas nos sistemas CAD, para solucionar numericamente problemas governados por equações diferenciais parciais. A AIG compartilha das características de discretização convencionais ao Método dos Elementos Finitos (MEF). Uma vantagem percebida na AIG é a retenção da geometria exata, referente ao problema, do início ao fim da análise, independente da quantidade de refinamentos utilizados na malha. No MEF, ao contrário, trabalha-se com formas geométricas aproximadas. Uma tentativa de ilustrar essa idéia, de maneira esquemática, é vista na FIGURA 3, onde observa-se que no MEF a forma de um círculo é aproximada por um polígono, após vários refinamentos, e para a AIG, tem-se a forma

exata desde a discretização mais grosseira. A fim de comprovar a eficiência do método, os autores testaram diferentes problemas nas áreas de análise estrutural e mecânica dos fluidos, para os quais foram obtidos excelentes resultados em termos de convergência das soluções.

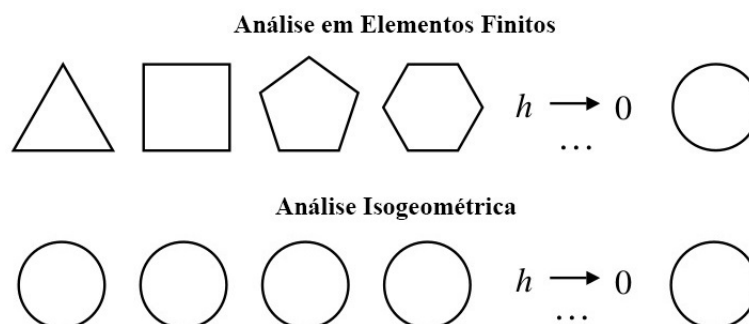


FIGURA 3 – REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DE UM CÍRCULO PELO MEF E PELA AIG.

FONTE: Adaptado de COTTRELL et al. (2006).

No trabalho de Cottrell et al. (2006) encontra-se a primeira aplicação da AIG em problemas de vibração de estruturas. Nesse trabalho, diversos problemas foram testados, incluindo o estudo de vibração em vigas de Euler-Bernoulli, membranas e placas, nos quais observou-se que a AIG baseada nas NURBS apresentou um melhor comportamento quando comparada ao uso de alguns polinômios clássicos da literatura de MEF como, por exemplo, os polinômios de Hermite. Verificou-se que o refinamento k da AIG foi superior ao refinamento p do MEF, sendo mais robusto e acurado. Também, como destaque, nesse trabalho foi analisado uma peça cilíndrica tridimensional em estado de vibração, e foram alcançados ótimas aproximações aos resultados experimentais existentes. Mais recentemente, Rauen (2014), também na área de vibração de estruturas, analisou problemas de barras, vigas, treliças e chapas e apresentou um estudo comparativo entre o MEF clássico, os métodos enriquecidos, o MEF Generalizados, o MEF Hierárquicos e a AIG. O autor constatou que para alguns casos foram obtidos melhores resultados com a AIG.

Um inicial mas profundo estudo matemático foi realizado por Bazilevs et al. (2006). Os autores avaliaram a estabilidade e a aproximação das soluções quando utilizado o refinamento h nas malhas. Também desenvolveram estimadores de erros para o uso das NURBS como funções base. Todos os resultados obtidos para os problemas analisados mostraram-se de acordo com os resultados teóricos esperados.

Outro estudo inicial que merece destaque é o de Zhang et al. (2006). Nele a AIG é utilizada para análise de condução de sangue em partes de artérias aortas. Através de técnicas de processamento de imagem, os pesquisadores converteram imagens retiradas de tomografias em formas geométricas NURBS. A partir disso, com a obtenção desses dados foi possível a aplicação das geometrias NURBS, representativas das artérias, na Análise Isogeométrica para o estudo de fluxo sanguíneo.

Na sequência, Cottrell (2007) e Cottrell, Hughes e Bazilevs (2009) abordaram detalhadamente os principais conceitos da AIG, dando enfoque no refinamento k e também no uso de múltiplos *patches* para construção de malhas mais complexas, assim como as principais semelhanças e diferenças entre o MEF e a AIG. Os autores investigaram diversos problemas no campo da elasticidade linear, vibrações de estruturas, propagação de ondas, sólidos incompressíveis, mecânica dos fluídos e problemas transientes. Além disso, seguindo a mesma formatação de Hughes (2000), apresentaram as matrizes de conectividade, as quais são de fundamental importância para a implementação de algoritmos relacionados a AIG.

Dörfel, Jüttler e Simeon (2010) aplicaram as T-splines na Análise Isogeométrica. Baseado nos estudos das T-splines no campo da computação gráfica (SEDERBERG et al., 2003), (SEDERBERG et al., 2004), observaram que o produto tensorial das NURBS, o qual dificulta o refinamento local da malha, poderia ser contornado com o uso das T-splines. Com o uso de um algoritmo adaptativo os autores analisaram problemas da elasticidade linear e de condução de calor. Avaliando o erro em termos da norma L^2 e na norma em energia, os autores verificaram que o algoritmo adaptativo com o uso das T-splines trouxe melhores resultados quando comparado com a AIG baseada no uso das NURBS.

Bazilevs et al. (2010) contribuíram no campo da AIG baseada nas T-splines com um artigo no qual foram sintetizados os principais conceitos relativos a essa abordagem. O uso das T-splines com diferentes graus (FINNIGAN, 2008) foi detalhado e também foram testados diversos problemas de análise estrutural e mecânica dos fluídos, bidimensionais e tridimensionais, sendo obtidos bons resultados.

Borden et al. (2011) apresentaram uma nova abordagem para a aplicação das NURBS na AIG, utilizando uma estruturação de dados baseada na extração de Bézier. Com essa estruturação, as funções base NURBS são obtidas através de uma combinação linear dos polinômios de Bernstein com os coeficientes do chamado operador de extração de Bézier. Isto faz com que as integrações numéricas sejam realizadas nos chamados elementos de Bézier, os quais se assemelham aos elementos clássicos empregados no MEF. Assim, a extração de Bézier facilita a implementação computacional da AIG aproximando da implementação computacional do MEF. Um exemplo de aplicação é encontrado no trabalho de Barroso (2015), no qual o autor empregou a extração de Bézier para NURBS na análise não-linear geométrica de estruturas laminadas.

Scott et al. (2011) seguiram a mesma linha da técnica de extração de Bézier para NURBS (BORDEN et al., 2011) e a aplicaram para as T-splines. A diferença encontrada entre as duas aplicações, apresentada pelos autores, está no fato de que, no caso das T-splines, os vetores de nós locais geram uma única função e, portanto, uma única linha da matriz do operador de extração de Bézier precisa ser computada, ao contrário da aplicação NURBS que, por utilizar vetores de nós globais, necessita do cálculo da matriz completa

do operador de extração. Além disso, apresentaram a maneira com a qual se constrói a matriz de conectividade que relaciona as funções locais às funções globais para cada elemento, pois nesse caso, cada função possui uma quantidade diferente de elementos em seu suporte.

Nguyen (2011) e Fredheim (2011) fizeram estudos comparativos entre MEF e AIG baseada em NURBS e T-splines, aplicados à problemas da elasticidade linear e de condução de calor. Foram utilizados elementos clássicos de Lagrange para o MEF, e para a AIG, elementos obtidos com a aplicação da extração de Bézier. Os resultados obtidos mostraram uma maior acurácia da AIG em relação ao MEF, apesar de serem obtidas taxas de convergências semelhantes para os métodos. Também, comprovaram a facilidade da aplicação da extração de Bézier e detalharam os algoritmos utilizados para as análises.

Nguyen-Thanh et al. (2011) apresentaram a Análise Isogeométrica baseada nas PHT-splines. Introduzidas por Deng et al. (2008), as PHT-splines são obtidas com base nas chamadas T-malhas hierárquicas e possuem as mesmas propriedades das NURBS, como: funções não negativas, suporte local e partição da unidade. Além disso, superam as T-splines em alguns aspectos, principalmente em relação aos refinamentos adaptativos e aos casos tridimensionais. Nguyen-Thanh et al. (2011) testaram alguns exemplos numéricos para os quais mostraram que a convergência das soluções da AIG baseada nas PHT-splines foram superiores ao MEF e a AIG baseada nas NURBS, além do erro obtido ter sido menor. No entanto, ressaltam que a aplicação das PHT-splines atinge apenas continuidade C^1 , fato que limita sua aplicação em alguns problemas físicos.

Nguyen-Thanh et al. (2014) apresentaram a Análise Isogeométrica baseada nas RHT-splines. Devido ao fato das PHT-splines serem polinomiais, não é possível a representação exata das formas cônicas. A fim de superar isso, os autores propuseram uma formulação racional para a obtenção dessas formas, denominadas de RHT-splines. As RHT-splines possuem as propriedades das B-splines e NURBS, além de permitirem eficientes refinamentos locais. Nesse estudo os autores mostraram que o método apresentou bons resultados para problemas estáticos e de vibração. Outra aplicação da AIG baseada nas RHT-splines pode ser vista em Nguyen-Thanh et al. (2017), onde os autores exploram problemas envolvendo estruturas de cascas finas, para o quais também foram obtidos ótimos resultados.

Outra linha de pesquisa que ganhou destaque é a relacionada à Análise Isogeométrica Estendida (XIGA). Foi introduzida em De Luycker et al. (2011) e explorada em diversos outros trabalhos (GHORASHI; VALIZADEH; MOHAMMADI, 2012) (BHARDWAJ; SINGH; MISHRA, 2013) (NGUYEN-THANH et al., 2015) (SINGH; BHARDWAJ; MISHRA, 2015). Nessa técnica, conceitos relativos ao Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM) (BELYTSCHKO; BLACK, 1999) (MOËS; DOLBOW; BELYTSCHKO, 1999) (BELYTSCHKO; GRACIE; VENTURA, 2009), como, o uso de funções de enriquecimento Heaviside e funções

de enriquecimento de ponta de trinca, são utilizados em conjunto com as funções base NURBS para a análise de propagação de trincas. Mais recentemente, as funções T-splines também foram incorporadas na XIGA (SINGH et al., 2017). Nesses trabalhos citados, a XIGA se mostrou uma boa alternativa ao uso do XFEM.

Nguyen et al. (2015) traçaram um panorama com as principais frentes de pesquisa onde a AIG vem sendo explorada. Algumas dessas linhas de pesquisa são relacionadas à problemas de contato, no qual se ganha vantagem com o uso de superfícies suaves proporcionadas pelas NURBS, à problemas de cascas e placas, à problemas envolvendo análise de fluídos e interação fluído-estrutura e, como já mencionado, à problemas relativos a vibração de estruturas, no qual o refinamento k apresenta grandes vantagens.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DA ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA

Neste capítulo são apresentados os conceitos teóricos necessários para a compreensão da Análise Isogeométrica. Inicialmente, são apresentadas as funções B-splines e as funções NURBS, suas formulações, suas propriedades e suas aplicações na geração de formas geométricas (curvas e superfícies). Além disso, abordam-se o importante conceito de geometria projetiva e as técnicas de refinamentos.

Na sequência, é tratada a estrutura necessária para uma Análise Isogeométrica baseada no uso das funções NURBS, tal como as malhas empregadas (malha de controle e malha física), o espaço paramétrico, o espaço indicial e o domínio de integração. Da mesma maneira, discute-se os conceitos relativos à Análise Isogeométrica baseada no uso das funções T-splines, entre eles as definições de T-malha, das T-junções e dos vetores de nós locais, além de aspectos referentes a continuidade das funções.

Por fim, é exposta a estruturação de dados baseado na extração de Bézier, tanto para o caso da AIG baseada em NURBS quanto para o caso da AIG baseada nas T-splines.

Ressalta-se que, a fim de se ater ao escopo do presente trabalho, não são discutidos os casos envolvendo o uso de sólidos tridimensionais. Esse tópico encontra-se detalhado nos trabalhos de Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005), Cottrell (2007), Cottrell, Hughes e Bazilevs (2009).

3.1 FUNÇÕES B-SPLINES

Os conceitos teóricos das funções B-splines, apresentados aqui, são baseados na abordagem detalhada desse tema encontrada em Piegl e Tiller (1996) e Rogers (2001), relativa às formulações, às propriedades das funções e ao seu uso, em especial, na área de modelagem gráfica computacional. Adicionalmente, esses assuntos serão discutidos sob a perspectiva dos trabalhos de Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005), Cottrell (2007), Cottrell, Hughes e Bazilevs (2009), Bazilevs et al. (2010), os quais sintetizaram os mesmos conceitos, porém visando a aplicabilidade numérica da Análise Isogeométrica.

3.1.1 Vetor de nós

A primeira parte a ser compreendida no estudo das B-splines é o denominado vetor de nós. Um vetor de nós, em uma dimensão, é um conjunto não decrescente de coordenadas ($\xi_i \leq \xi_{i+1}$), denotado por $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, onde $\xi_i \in \mathbb{R}$ é o i -ésimo nó, i o índice do nó que varia de $i = 1, 2, \dots, n + p + 1$, p o grau do polinômio e n o número de funções bases que compreendem as B-splines.

O vetor de nós é considerado uniforme se os nós são igualmente espaçados como, por exemplo, $\Xi = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$. Caso os nós não sejam igualmente espaçados, o vetor de nós é considerado não uniforme, como, por exemplo, $\Xi = \{0, 0.2, 0.5, 0.8, 1\}$. Os nós também podem ser repetidos, ou seja, mais de um nó dentro de um vetor pode ter o mesmo valor, como é o caso do vetor $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 0.5, 1, 1, 1\}$. Essa multiplicidade dos nós é simbolizada por m_i . Os vetores de nós que apresentam a seguinte forma $\Xi = [a, \dots, a, \xi_{p+2}, \dots, \xi_{n-p-1}, b, \dots, b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e sendo o nó a e o nó b repetidos $p + 1$ vezes, são chamados de vetores de nós abertos.

3.1.2 Funções base B-splines

As funções base B-splines são definidas com a utilização da fórmula recursiva de Cox-de Boor. Inicia-se, primeiramente, pelas funções definidas por partes de grau $p = 0$:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{para os demais casos} \end{cases} \quad (3.1)$$

e segue-se na sequência, para os graus $p = 1, 2, 3, \dots$, cujas funções são definidas por:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3.2)$$

onde $\xi_i \in \mathbb{R}$ é o i -ésimo nó, i o índice do nó que varia de $i = 1, 2, \dots, n + p + 1$, p o grau do polinômio e n o número de funções bases.

Um exemplo de funções B-splines é apresentado na FIGURA 4 e na FIGURA 5 pode ser observado um exemplo de funções para o caso de nós internos repetidos.

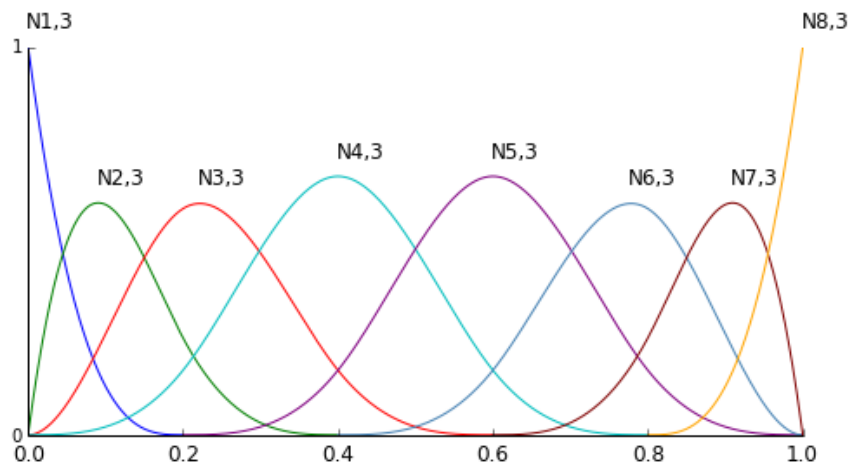


FIGURA 4 – EXEMPLO DE FUNÇÕES B-SPLINES DE GRAU 3 DEFINIDAS PARA O VETOR $\Xi = [0, 0, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1, 1]$.

FONTE: O autor (2017).

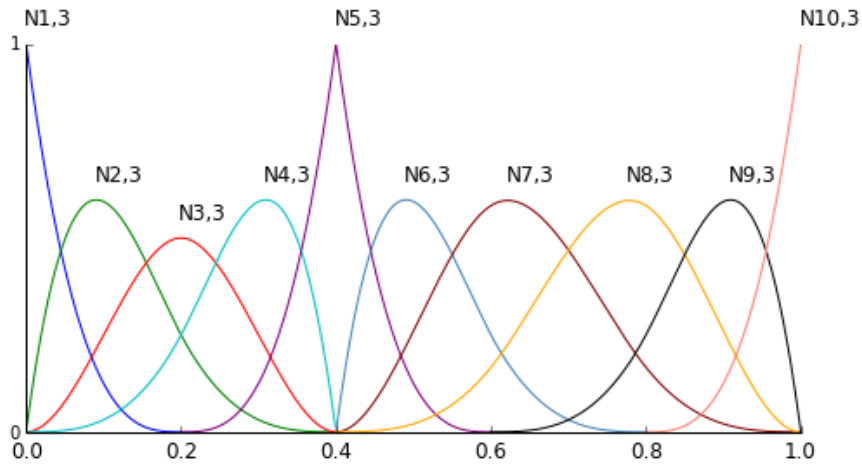


FIGURA 5 – EXEMPLO DE FUNÇÕES B-SPLINES DE GRAU 3 DEFINIDAS PARA O VETOR $\Xi = [0, 0, 0, 0, 0.2, 0.4, 0.4, 0.4, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1, 1, 1]$.

FONTE: O autor (2017).

Segue das funções base B-splines que:

- $N_{i,0}(\xi)$ é uma função degrau, diferente de zero apenas no intervalo semi-aberto $[\xi_i, \xi_{i+1})$;
- para $p > 0$, $N_{i,p}(\xi)$ é uma combinação linear de duas funções base de grau $(p - 1)$;
- para a Eq. (3.2) aceita-se a razão $0/0$, sendo admitido zero o seu quociente;
- $N_{i,p}(\xi)$ são funções definidas por partes;
- o intervalo semi-aberto, $[\xi_i, \xi_{i+1})$, é chamado de i -ésimo *knot span*. Esse intervalo pode ter comprimento nulo quando $\xi_i = \xi_{i+1}$;

Algumas propriedades importantes das funções base B-splines são destacadas a seguir:

Propriedade 1: O suporte de cada função $N_{i,p}$ é compacto e contido no intervalo $[\xi_i, \xi_{i+p+1})$ (suporte local), ou seja, $N_{i,p}(\xi) = 0$ se ξ estiver fora desse intervalo;

Propriedade 2: $N_{i,p}(\xi) \geq 0$ para todo i, p e ξ ;

Propriedade 3: Para qualquer *knot span*, $[\xi_i, \xi_{i+1})$, $\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1$ para todo $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$ (partição da unidade);

Propriedade 4: Exceto para o caso $p = 0$, $N_{i,p}(\xi)$ contém apenas um valor máximo.

3.1.3 Derivada de uma função B-spline

As derivadas das funções base são representadas em termos de funções B-splines de grau inferior. Para o caso da derivada de primeira ordem tem-se a seguinte expressão:

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3.3)$$

Na equação (3.3), os denominadores que envolvem a diferença entre nós podem assumir o valor zero, nesse caso o quociente é admitido como sendo zero.

Geralmente, as funções base de grau p possuem $p - m_i$ derivadas contínuas (C^{p-m_i}), sendo m_i a multiplicidade do nó ξ_i . Portanto, aumentando-se a multiplicidade do nó diminui-se a continuidade da função nesse ponto.

3.1.4 Curvas B-splines

Uma curva B-spline é definida pela seguinte expressão:

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i \quad (3.4)$$

onde n é o número de funções bases $N_{i,p}$, e \mathbf{P}_i os pontos de controle correspondentes. O polígono formado pelos pontos de controle é chamado de polígono de controle. Na FIGURA 6 pode ser visto um exemplo de uma curva B-spline gerada utilizando-se a expressão (3.4).

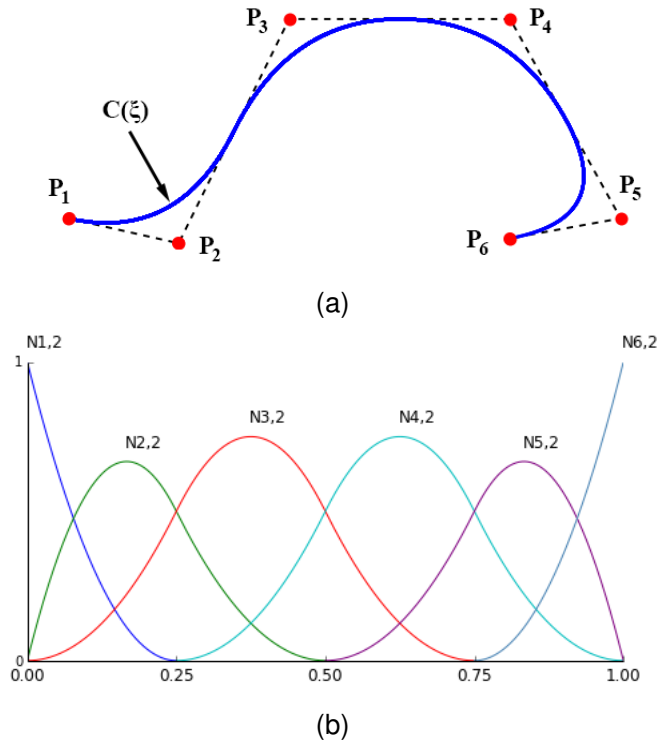


FIGURA 6 – a) CURVA B-SPLINE, PONTOS DE CONTROLE E POLÍGONO DE CONTROLE. b) FUNÇÕES B-SPLINES DE GRAU 2 GERADAS COM O VETOR DE NÓS $\Xi = [0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1]$ UTILIZADAS PARA A OBTENÇÃO DA CURVA $C(\xi)$.

FONTE: O autor (2017).

Importantes propriedades das Curvas B-spline são:

Propriedade 1: Ocorre interpolação nos pontos extremos, isto é, $C(0) = P_1$ e $C(1) = P_n$ (Para o caso do vetor de nós $\Xi = [0 \dots 0, \xi_{p+1}, \dots, \xi_n, 1 \dots 1]$);

Propriedade 2: Na ocorrência de uma transformação afim, aplica-se essa transformação nos pontos de controle da curva;

Propriedade 3: A curva é contida dentro da envoltória convexa do seu polígono de controle;

Propriedade 4: Movendo-se o ponto de controle P_i modifica-se a curva $C(\xi)$ somente no intervalo $[\xi_i, \xi_{i+p+1})$. Isto é resultado do fato de que $N_{i,p}(\xi) = 0$ para $\xi \notin [\xi_i, \xi_{i+p+1})$;

Propriedade 5: É possível que pontos de controle ocupem a mesma posição.

3.1.5 Superfícies B-spline

Dado uma rede de pontos de controle bidimensional, $\mathbf{P}_{i,j}$, sendo $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, m$, e dado os vetores de nós $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ e $H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$, uma superfície B-spline pode ser definida por:

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \mathbf{P}_{i,j} \quad (3.5)$$

onde n é o número de funções base $N_{i,p}$, m o número de funções base $M_{j,q}$, e $\mathbf{P}_{i,j}$ os correspondentes pontos de controle. Do produto tensorial das funções B-splines apresentado na equação (3.5), destacam-se as seguintes propriedades:

Propriedade 1: $N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta) \geq 0$, para todo i, j, p, q, ξ, η ;

Propriedade 2: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta) = 1$, para todo $(\xi, \eta) \in [0, 1] \times [0, 1]$ (partição da unidade);

Propriedade 3: $N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta) = 0$ se ξ e $\eta \notin [\xi_i, \xi_{i+p+1}) \times [\eta_j, \eta_{j+q+1})$;

Propriedade 4: Em $[\xi_i, \xi_{i+1}) \times [\eta_j, \eta_{j+1})$, no máximo $(p+1)(q+1)$ funções são não nulas;

Propriedade 5: Se $p > 0$ e $q > 0$, então $N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)$ possui somente um valor máximo;

Para as superfícies B-splines têm-se as seguintes propriedades:

Propriedade 1: Interpolação nos pontos extremos da superfície, isto é, $\mathbf{S}(0, 0) = \mathbf{P}_{1,1}$, $\mathbf{S}(1, 0) = \mathbf{P}_{n,1}$, $\mathbf{S}(0, 1) = \mathbf{P}_{1,m}$, $\mathbf{S}(1, 1) = \mathbf{P}_{n,m}$.

Propriedade 2: Na ocorrência de uma transformação afim, aplica-se essa transformação nos pontos de controle da superfície;

Propriedade 3: Se ξ e $\eta \in [\xi_{i_0}, \xi_{i_0+1}) \times [\eta_{j_0}, \eta_{j_0+1})$, então $\mathbf{S}(\xi, \eta)$ pertence a envoltória convexa dos pontos de controle $\mathbf{P}_{i,j}$, para $i_0 - p \leq i \leq i_0$ e $j_0 - q \leq j \leq j_0$;

Um exemplo de superfície B-spline formada a partir de vetores de nós em duas direções paramétricas distintas, ξ e η , é apresentado na FIGURA 7.

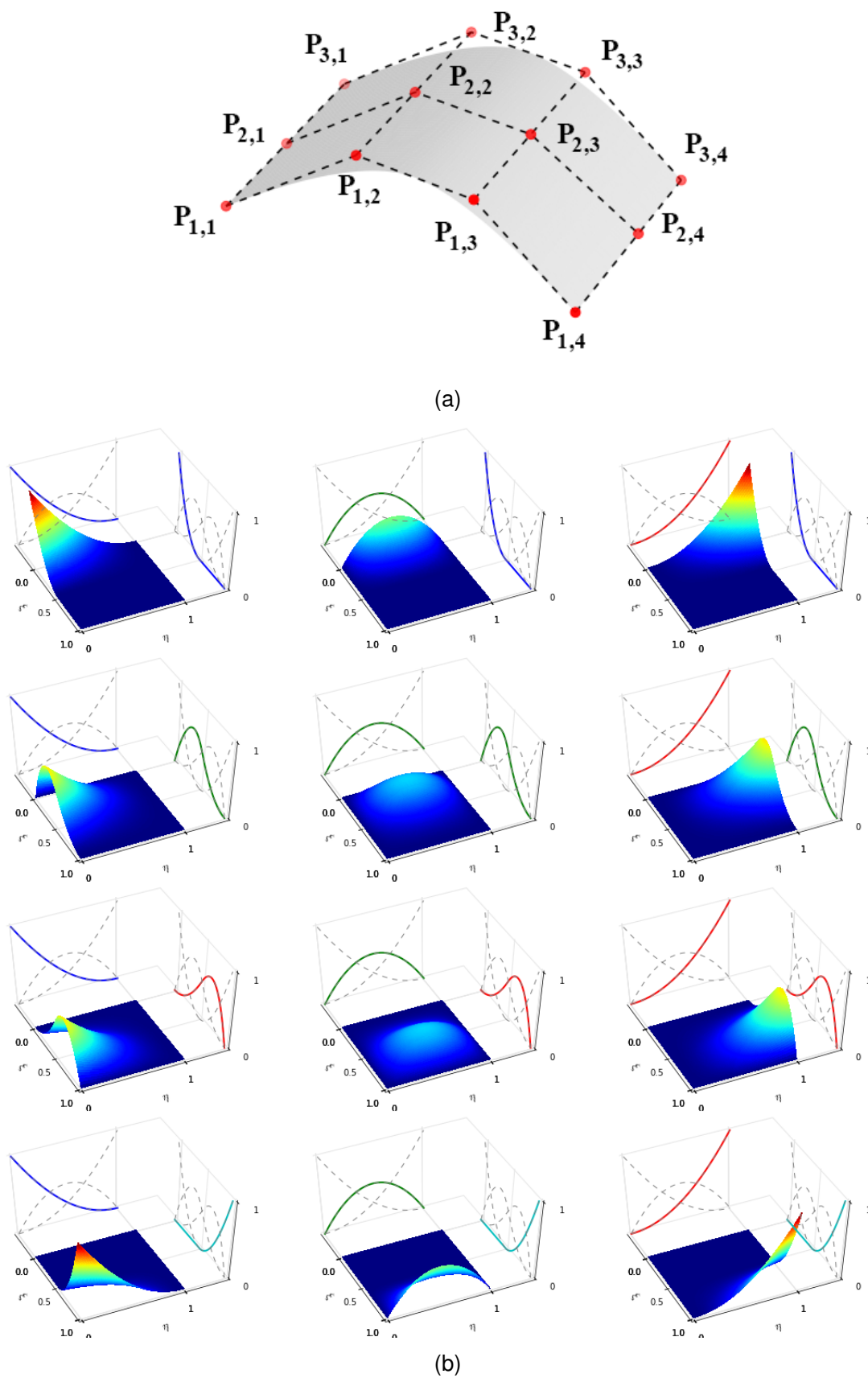


FIGURA 7 – a) SUPERFÍCIE B-SPLINE, PONTOS DE CONTROLE E POLÍGONO DE CONTROLE. b) FUNÇÕES B-SPLINES DE GRAU 2 GERADAS A PARTIR DOS VETORES DE NÓS $\Xi = [0,0,0,0,5,1,1,1]$ e $H = [0,0,0,1,1,1]$, UTILIZADAS PARA GERAÇÃO DA SUPERFÍCIE APRESENTADA EM a).

FONTE: O autor (2017).

3.2 NURBS

Nesta seção são apresentados os conceitos relativos às NURBS, com base nos trabalhos de Piegl e Tiller (1996) e Rogers (2001), Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005), Cottrell (2007) e Cottrell, Hughes e Bazilevs (2009).

3.2.1 Transformação Projetiva

Inicialmente, é necessário definir a transformação projetiva que é parte importante da compreensão das NURBS. Do ponto de vista geométrico, uma entidade NURBS em \mathbb{R}^d é obtida por meio da transformação projetiva de uma entidade B-spline em \mathbb{R}^{d+1} , sendo d a dimensão do espaço. Isso permite, por exemplo, que círculos e elipses sejam exatamente construídos a partir das transformações projetivas.

Os pontos de controle no espaço \mathbb{R}^d são obtidos pela projeção dos pontos de controle em \mathbb{R}^{d+1} , dado por:

$$(\mathbf{P}_i)_j = (\mathbf{P}_i^w)_j / w_i, \quad j = 1, \dots, d, \quad (3.6)$$

$$w_i = (\mathbf{P}_i^w)_{d+1} \quad (3.7)$$

onde \mathbf{P}_i^w é o ponto de controle projetivo, w_i o i -ésimo peso, $(\mathbf{P}_i)_j$ a j -ésima componente do vetor \mathbf{P}_i e $(\mathbf{P}_i^w)_j$ a j -ésima componente do vetor (\mathbf{P}_i^w) .

Um exemplo de transformação projetiva pode ser vista na FIGURA 8, onde transforma-se uma curva projetiva B-spline $C^w(\xi)$ em \mathbb{R}^3 para uma curva NURBS $C(\xi)$ em \mathbb{R}^2 .

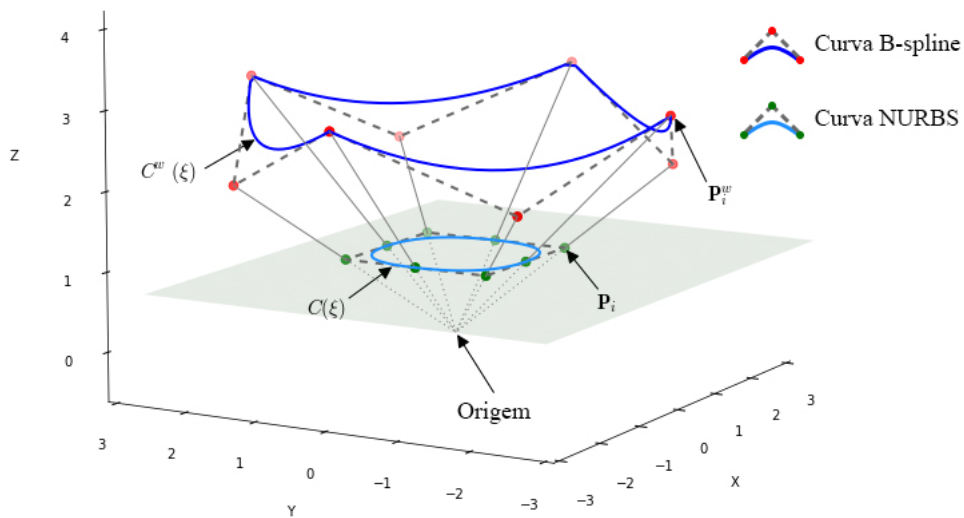


FIGURA 8 – UM CÍRCULO EM \mathbb{R}^2 CONSTRUÍDO A PARTIR DA TRANSFORMAÇÃO PROJATIVA DE UMA B-SPLINE QUADRÁTICA EM \mathbb{R}^3 .

FONTE: Adaptado de COTTRELL; HUGHES; BAZILEVS (2009).

3.2.2 Funções base NURBS

Do ponto de vista algébrico é muito mais vantajoso a construção direta de um espaço NURBS e, para tanto, é necessário definir funções base que permitam a obtenção desse espaço.

Uma base NURBS pode ser definida pela função racional dada pela seguinte expressão, para o caso de uma única variável (ξ):

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{W(\xi)} \quad (3.8)$$

onde $W(\xi)$ é a função peso que é definida por:

$$W(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi)w_i \quad (3.9)$$

Podem-se citar algumas propriedades importantes das funções $R_i^p(\xi)$:

Propriedade 1: $R_i^p(\xi) \geq 0$, para todo i, p e $\xi \in [0, 1]$;

Propriedade 2: $\sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) = 1$, para todo $\xi \in [0, 1]$ (partição da unidade);

Propriedade 3: $R_1^p(0) = R_n^p(1) = 1$;

Propriedade 4: $R_i^p(\xi) = 0$ se $\xi \notin [\xi_i, \xi_{i+p+1})$;

Propriedade 5: Todas as derivadas de $R_i^p(\xi)$ existem no interior de um *knot span*. Em um nó, $R_i^p(\xi)$ é $p - m_i$ vezes diferenciável, sendo m_i a multiplicidade do nó;

Propriedade 6: Se $w_i = 1$ para todo i , então $R_i^p(\xi) = N_i^p(\xi)$ para todo i , isto é, N_i^p são casos especiais de R_i^p .

Uma base NURBS também pode ser definida pela seguinte expressão, para o caso de duas variáveis (ξ, η) :

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{W(\xi, \eta)} \quad (3.10)$$

$$W(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j} \quad (3.11)$$

Da mesma forma, destacam-se propriedades importantes para $R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)$:

Propriedade 1: $R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) \geq 0$, para todo i, j, p, q, ξ, η ;

Propriedade 2: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = 1$, para todo $(\xi, \eta) \in [0, 1] \times [0, 1]$ (Partição da unidade);

Propriedade 3: $R_{i,j}(\xi, \eta) = 0$ se ξ e $\eta \notin [\xi_i, \xi_{i+p+1}) \times [\eta_j, \eta_{j+q+1})$;

Propriedade 4: Em $[\xi_i, \xi_{i+1}) \times [\eta_j, \eta_{j+1})$ no máximo $(p+1)(q+1)$ funções são não nulas;

Propriedade 5: Se $p > 0$ e $q > 0$, então $R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)$ possui somente um valor máximo;

Propriedade 6: $R_{1,1}^{p,q}(0, 0) = R_{n,1}^{p,q}(1, 0) = R_{1,m}^{p,q}(0, 1) = R_{n,m}^{p,q}(1, 1) = 1$

Propriedade 7: Em $[\xi_i, \xi_{i+1}) \times [\eta_j, \eta_{j+1})$ todas derivadas parciais de $R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)$ existem. No nó ξ a função é $p - m_i$ vezes diferenciável na direção ξ , e no nó η é $q - m_i$ vezes diferenciável na direção η ;

Propriedade 8: Se todos $w_{i,j} = a$ para $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, e $a \neq 0$, então $R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)$ para todo i, j .

Nota-se que as funções NURBS herdam as propriedades das funções B-splines que as geraram.

3.2.3 Derivadas das funções NURBS

Para o caso da função $R_i^p(\xi)$ tem-se a derivada de primeira ordem definida por:

$$\frac{d}{d\xi} R_i^p(\xi) = w_i \frac{W(\xi)N'_{i,p}(\xi) - W'(\xi)N_{i,p}(\xi)}{(W(\xi))^2} \quad (3.12)$$

onde $N'_{i,p}(\xi)$ é a representação de $\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi)$ e $W'(\xi)$ é dado pela expressão:

$$W'(\xi) = \sum_{i=1}^n N'_{i,p}(\xi)w_i \quad (3.13)$$

Para o caso da função $R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)$, as derivadas parciais são definidas da seguinte maneira. Para a direção ξ , tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = w_{i,j} M_{j,q}(\eta) \frac{W(\xi, \eta)N'_{i,p}(\xi) - W(\xi, \eta)_{,\xi} N_{i,p}(\xi)}{(W(\xi, \eta))^2} \quad (3.14)$$

onde $N'_{i,p}(\xi)$ é a representação de $\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi)$, e $W(\xi, \eta)_{,\xi}$ é dado pela expressão:

$$W(\xi, \eta)_{,\xi} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N'_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j} \quad (3.15)$$

E para a direção η a derivada é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = w_{i,j} N_{i,p}(\xi) \frac{W(\xi, \eta) M'_{j,q}(\eta) - W(\xi, \eta)_{,\eta} M_{j,q}(\eta)}{(W(\xi, \eta))^2} \quad (3.16)$$

onde $M'_{j,q}(\eta)$ é a representação de $\frac{d}{d\eta} M_{j,q}(\eta)$ e $W(\xi, \eta)_{,\eta}$ é dado pela expressão:

$$W(\xi, \eta)_{,\eta} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M'_{j,q}(\eta) w_{i,j} \quad (3.17)$$

3.2.4 Curvas NURBS

As curvas NURBS são obtidas a partir da combinação linear das funções racionais $R_i^p(\xi)$ com os pontos de controle \mathbf{P}_i , dadas pela seguinte equação:

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) \mathbf{P}_i \quad (3.18)$$

As curvas NURBS possuem propriedades semelhantes às curvas B-splines, as quais são destacadas a seguir:

Propriedade 1: Interpolação nos pontos extremos, isto é, $\mathbf{C}(0) = \mathbf{P}_1$ e $\mathbf{C}(1) = \mathbf{P}_n$;

Propriedade 2: Na ocorrência de uma transformação afim, aplica-se esta transformação nos pontos da curva;

Propriedade 3: Se $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$, então $\mathbf{C}(\xi)$ está contida na envoltória convexa formada pelos pontos de controle $\mathbf{P}_{i-p}, \dots, \mathbf{P}_i$;

Propriedade 4: Se o ponto de controle \mathbf{P}_i é movido, ou o peso w_i é modificado, isso afeta somente a porção da curva no intervalo $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+p+1})$

3.2.5 Superfície NURBS

Assim como as curvas NURBS, uma superfície é obtida pela combinação linear das funções racionais $R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)$ com os pontos de controle $\mathbf{P}_{i,j}$, dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{i,j} \quad (3.19)$$

As superfícies NURBS possuem propriedades semelhantes às superfícies B-splines, as quais são destacadas a seguir:

Propriedade 1: Interpolação nos pontos extremos, ou seja, $\mathbf{S}(0, 0) = \mathbf{P}_{1,1}$, $\mathbf{S}(1, 0) = \mathbf{P}_{n,1}$, $\mathbf{S}(0, 1) = \mathbf{P}_{1,m}$, $\mathbf{S}(1, 1) = \mathbf{P}_{n,m}$

Propriedade 2: Na ocorrência de uma transformação afim, aplica-se esta transformação nos pontos de controle de uma superfície;

Propriedade 3: Assumindo $w_{i,j} \geq 0$ para todo i, j . Se ξ e $\eta \in [\xi_{i_0}, \xi_{i_0+p+1}) \times [\eta_{j_0}, \eta_{j_0+q+1})$, então $S(\xi, \eta)$ está contido na envoltória convexa dos pontos de controle $P_{i,j}$, $i_0 - p \leq i \leq i_0$ e $j_0 - q \leq j \leq j_0$;

Propriedade 4: Se o ponto de controle $P_{i,j}$ é movido, ou o peso $w_{i,j}$ é modificado, isso afeta somente a porção da superfície no retângulo $[\xi_i, \xi_{i+p+1}) \times [\eta_j, \eta_{j+q+1})$

3.3 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA

Nesta seção são discutidos os conceitos necessários para a compreensão da Análise Isogeométrica baseada no uso das NURBS. Inicialmente, é introduzida a AIG e, para tanto, são definidos os conceitos de malhas e de elementos. Também são descritos o espaço físico, o espaço indicial, o espaço paramétrico e o domínio de integração. São ainda apresentadas as matrizes de conectividades **INC** e **IEN**, as quais guardam importantes relações que são utilizadas durante a análise numérica. Além disso, é apresentado o refinamento k da AIG. Seguindo o escopo deste trabalho, as discussões são orientadas para os casos de problemas bidimensionais.

3.3.1 Malha física e malha de controle

Têm-se na Análise Isogeométrica dois conceitos de malhas: a malha física e a malha de controle. A malha física é a representação da geometria no espaço físico, decomposta em elementos, sejam eles, *patches* ou *knot spans*. A malha de controle é formada a partir dos pontos de controle, nos quais estão localizados os graus de liberdade ou variáveis de controle. Na FIGURA 9 podem ser observadas as duas malhas mencionadas.

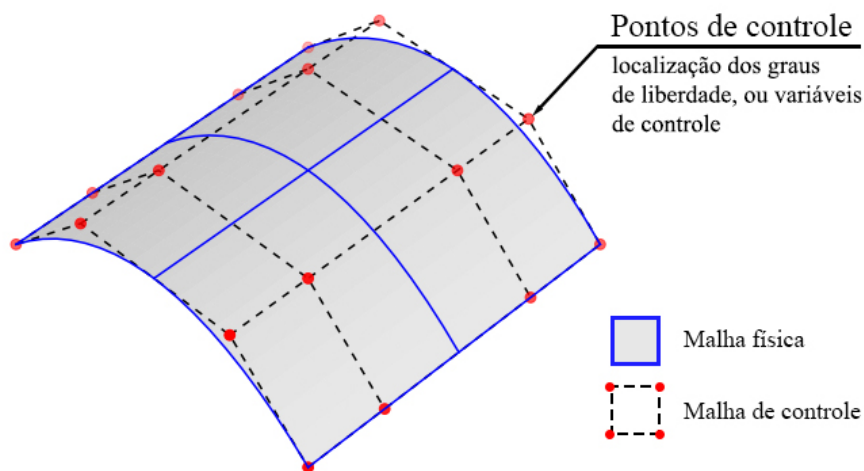


FIGURA 9 – MALHA FÍSICA E MALHA DE CONTROLE.
FONTE: O autor (2017).

3.3.2 Elementos

Existem duas definições de elementos na AIG, os *patches* e os *knot spans*. Os *patches* são considerados como macroelementos e os *knot spans*, como microelementos. Os *knot spans* são as menores entidades na configuração da AIG. São intervalos entre nós, em uma dimensão representados por pontos e em duas dimensões representados por linhas. Um exemplo de um *knot span* em duas dimensões pode ser visto na FIGURA 10, assim como sua representação no espaço físico.

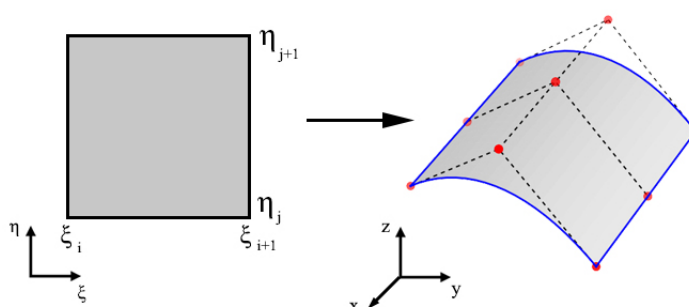


FIGURA 10 – UM *KNOT SPAN* E SEU MAPEAMENTO DO ESPAÇO PARAMÉTRICO PARA O ESPAÇO FÍSICO.

FONTE: O autor (2017).

Os *patches*, por sua vez, podem ser decompostos nos *knot spans*. Com um único *patch* é possível realizar modelagens de geometrias relativamente simples, já para os casos de problemas que envolvam geometrias mais complexas, recorre-se a junção de múltiplos *patches*, o que facilita o processo de modelagem e análise.

Na FIGURA 11 são vistos exemplos de uma malha física que pode ser formada tanto por um único *patch*, quanto pela junção de múltiplos *patches*. Na FIGURA 11a, observa-se a malha formada por um único *patch* que é composta por dois microelementos (elemento 01 e elemento 02), ou dois *knot spans*. Na FIGURA 11b, têm-se a junção de dois *patches*, ou macroelementos, que formam o mesmos dois elementos (elemento 01 e elemento 02) da malha, sendo cada *patch* formado por um *knot span*.

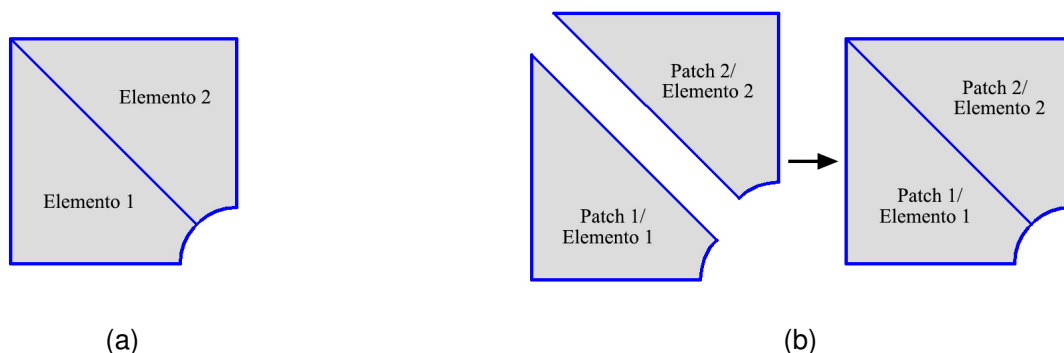


FIGURA 11 – a) MALHA FÍSICA FORMADA POR UM ÚNICO *PATCH*. b) MALHA FÍSICA COMPOSTA POR DOIS *PATCHES*.

FONTE: O autor (2017).

3.3.3 Espaço físico

O espaço físico tem suas coordenadas definidas no espaço cartesiano. Nele estão presentes a malha física e a malha de controle. Também é no espaço físico onde se visualizam os campos de deslocamentos, deformações, tensões, entre outros. Um exemplo do espaço físico é apresentado na FIGURA 12.

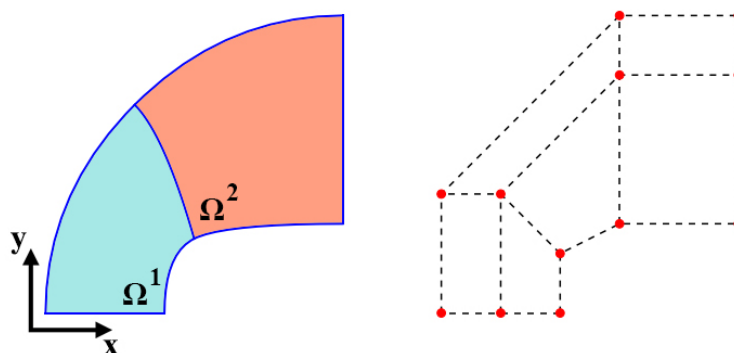


FIGURA 12 – MALHA FÍSICA FORMADA POR DOIS ELEMENTOS (Ω^1 E Ω^2) REPRESENTADA NO ESPAÇO FÍSICO (À ESQUERDA) E MALHA DE CONTROLE (À DIREITA), SEPARADA DA MALHA FÍSICA PARA MELHOR VISUALIZAÇÃO.

FONTE: Adaptado de HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS (2005).

3.3.4 Espaço Indicial

O espaço indicial é um espaço formado pela intersecção dos nós, pertencentes aos vetores de nós, Ξ e H , que juntos geram uma grade retangular. O exemplo do espaço indicial referente a malha física da FIGURA 12 pode ser visto na FIGURA 13. Os retângulos pertencentes a essa grade representam todos os elementos gerados pelos *knot spans* existentes, tanto os elementos de área nula quanto os elementos de área não nula. Com o auxílio do espaço indicial são definidas as matrizes de conectividade **INC** e **IEN**.

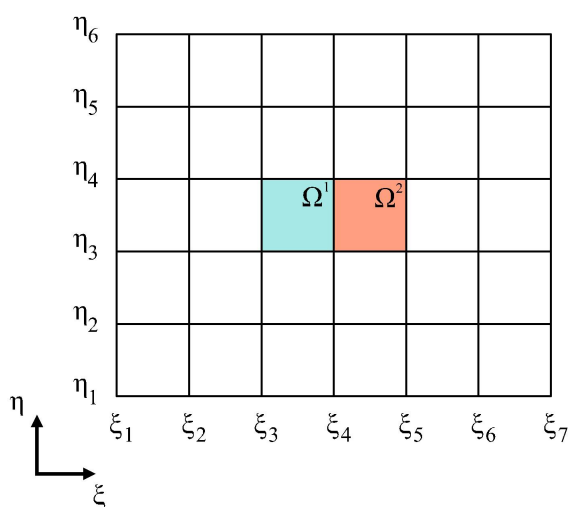


FIGURA 13 – EXEMPLO DE UM ESPAÇO INDICIAL

FONTE: Adaptado de HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS (2005).

3.3.5 Matriz INC

A partir do espaço indicial define-se a matriz **INC**, ou a matriz que armazena as coordenadas NURBS e indica o início do suporte das funções.

Para se definir uma coordenada NURBS, basta extrair os índices correspondentes aos nós dos vértices do espaço indicial. Dessa maneira, o vértice criado pelo encontro dos nós ξ_i e η_j é associado às coordenadas (i, j) . Com base nessas coordenadas, atribui-se uma numeração global para as funções NURBS pela seguinte expressão:

$$A = n(j - 1) + i \quad (3.20)$$

tal que \tilde{N}_A é o produto tensorial das funções $N_i(\xi)$ e $M_j(\eta)$. Onde i e j são as coordenadas NURBS e n o número de funções relacionadas ao vetor de nós Ξ .

Portanto, as coordenadas i e j indicam o início do suporte da função global identificada por A . Tomando como exemplo o espaço indicial da FIGURA 13, do vértice criado pela intersecção dos nós ξ_1 e η_1 extraem-se as coordenadas $(1, 1)$, considerando para este caso $n = 4$, tem-se como resultado a numeração global $A = 1$. Assim sendo, identifica-se nas coordenadas $(1, 1)$ o início do suporte da função $\tilde{N}_1(\xi, \eta)$ que representa o resultado do produto das funções quadráticas $N_1(\xi)$ e $M_1(\eta)$. Sabendo-se que o suporte de uma função $N_i(\xi)$ é dado por $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ e o suporte de uma função $M_j(\eta)$ dado por $[\eta_j, \eta_{j+q+1}]$, apresenta-se na FIGURA 14a a função $\tilde{N}_1(\xi, \eta)$ e a região de seu suporte. Nota-se na FIGURA 14a que somente o elemento Ω^1 é incluído nessa região do suporte. Assim, fica evidente que o elemento Ω^2 não está presente na região de suporte da função $\tilde{N}_1(\xi, \eta)$, no entanto, outras funções acabam alcançando este elemento, como, por exemplo, a função $\tilde{N}_6(\xi, \eta)$ associada às coordenadas NURBS $(2,2)$ (FIGURA 14b).

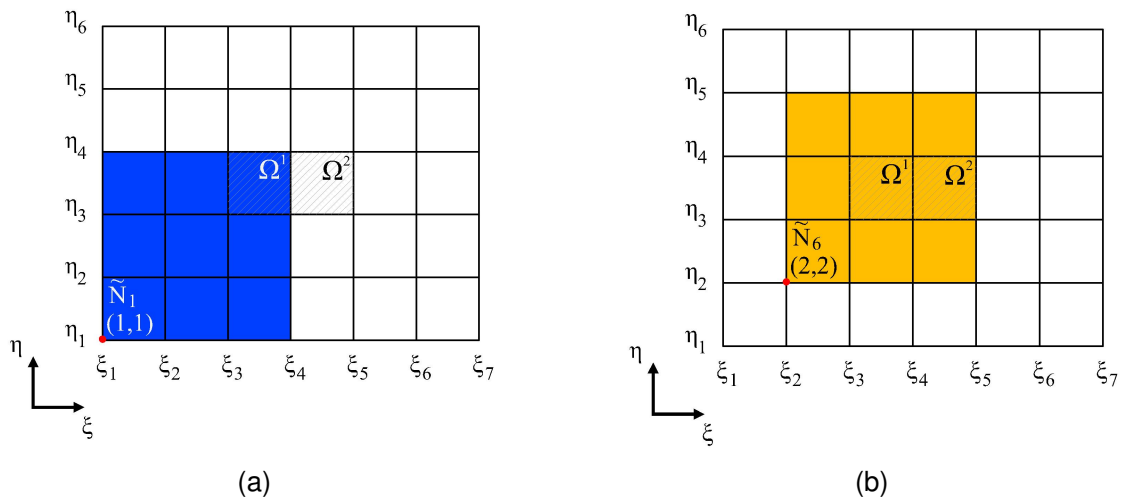


FIGURA 14 – a) SUPORTE DA FUNÇÃO \tilde{N}_1 NO ESPAÇO PARAMÉTRICO. b) SUPORTE DA FUNÇÃO \tilde{N}_6 NO ESPAÇO PARAMÉTRICO.

FONTE: Adaptado de HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS (2005).

Procedendo dessa forma para os outros vértices, obtém-se as relações que são armazenadas na matriz **INC**, como pode ser constatado na TABELA 1 e visualizado na FIGURA 15.

TABELA 1 – DADOS DA MATRIZ DE CONECTIVIDADE **INC**

INC	A (número global da função)											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1 (coordenada ξ)	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2 (coordenada η)	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3

FONTE: HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS (2005).

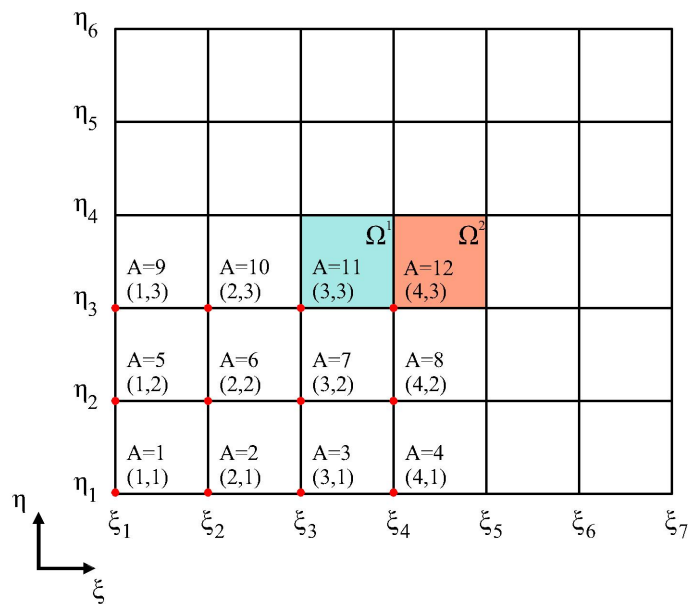


FIGURA 15 – COORDENADAS NURBS E NUMERAÇÃO GLOBAL DAS FUNÇÕES NO ESPAÇO INDICIAL.
FONTE: Adaptado de HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS (2005).

3.3.6 Matriz IEN

A atribuição de uma numeração global para as funções é utilizada para a identificação de todas as funções obtidas, enquanto a atribuição de uma numeração local para as funções é necessária para a identificação das funções que possuem suporte em um determinado elemento. Assim sendo, torna-se fundamental a criação de uma relação entre as funções locais e as funções globais. Essas informações são armazenadas na matriz denominada de **IEN**. Na sequência, apresentam-se os passos para criação dessa matriz.

Inicialmente, considerando um elemento $\Omega^e = [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$, $p + 1 \leq i \leq n$ e $q + 1 \leq j \leq m$, pode-se atribuir uma numeração para cada elemento através da seguinte expressão:

$$e = (j - q - 1)(n - p) + (i - p) \quad (3.21)$$

Sabe-se que a quantidade de funções locais que possuem suporte em um determinado elemento é $n_{en} = (p + 1)(q + 1)$. Com base nisso, enumeram-se as funções locais e as funções globais para a criação de uma relação entre elas, da seguinte maneira:

- atribui-se a um elemento e (enumerado de acordo com a equação 3.21), associado às coordenadas NURBS (i, j) do espaço indicial, a primeira função local identificada por $a = 1$. A partir dela são identificadas as demais funções locais, sempre partindo da direita para a esquerda na direção ξ e de cima para baixo na direção η , acompanhando o mesmo sequenciamento da numeração global detalhada nos próximos itens, até se alcançar o número final n_{en} ;
- com o auxílio da expressão (3.20) identifica-se com a numeração global A as coordenadas NURBS (i, j) . A partir disso, caminhando da direita para a esquerda na direção ξ do espaço indicial, continua-se a numeração global com $A - 1, \dots, A - p$;
- sabendo-se que a função N_{A-p-1} não possui suporte no elemento e , pula-se para a próxima linha abaixo, na direção η , e enumera-se da direita para a esquerda na direção ξ , com $A - n, A - n - 1, \dots, A - n - p$;
- da mesma forma, na sequência, continua-se com $A - 2n, A - 2n - 1, \dots, A - 2n - p$;
- prossegue-se com a numeração até se atingir o último conjunto de funções, numerando com $A - qn, A - qn - 1, \dots, A - qn - p$.

Um esquema genérico da numeração das funções globais relacionadas às funções locais de um elemento pode ser vista na FIGURA 16.

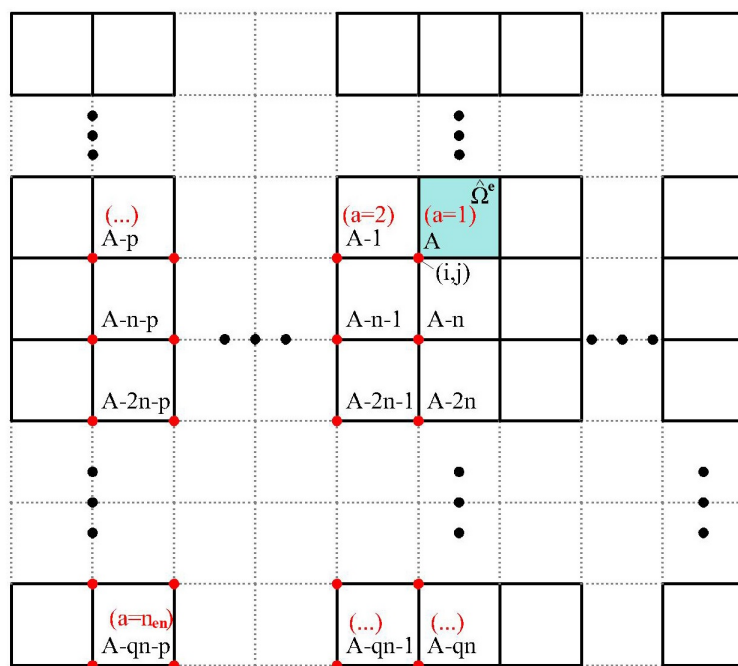


FIGURA 16 – a) ESQUEMA DE NUMERAÇÃO GLOBAL DAS FUNÇÕES NO ESPAÇO PARAMÉTRICO.
FONTE: O autor (2017).

O exemplo das numerações globais e locais para o espaço indicial da FIGURA 13 é visto na FIGURA 17. Com essas informações monta-se a matriz **IEN** apresentada na TABELA 2.

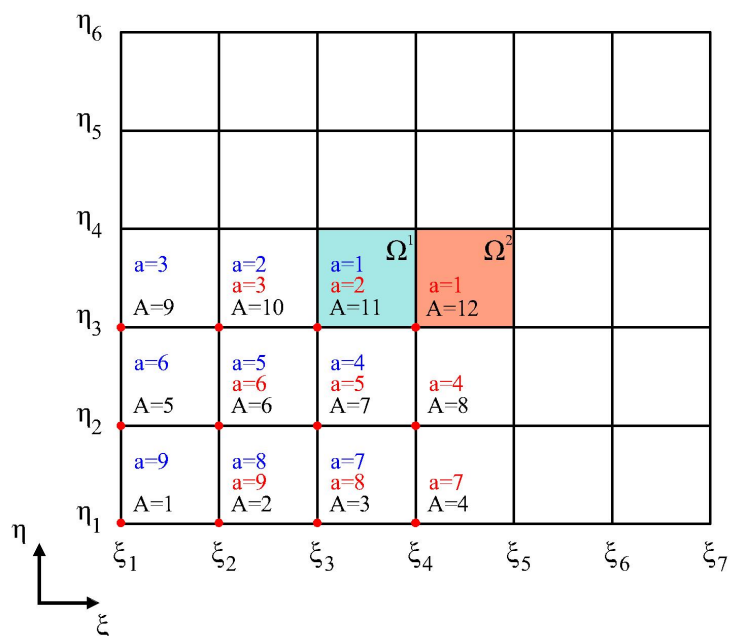


FIGURA 17 – a) EXEMPLO DE NUMERAÇÃO GLOBAL E NUMERAÇÃO LOCAL DAS FUNÇÕES.
FONTE: Adaptado de HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS (2005).

TABELA 2 – DADOS DA MATRIZ DE CONECTIVIDADE IEN

IEN	a (número local da função)								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
elemento=1	11	10	9	7	6	5	3	2	1
elemento=2	12	11	10	8	7	6	4	3	2

FONTE: HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS (2005).

3.3.7 Espaço paramétrico

O espaço paramétrico pode ser entendido como um espaço indicial compacto, onde apenas os elementos com áreas não nulas são observados. É um espaço retangular orientado no sistema de coordenadas ξ e η . Nele é possível observar os elementos que são mapeados no espaço físico, os quais efetivamente contribuem para a análise numérica. Um exemplo de espaço paramétrico, referente ao espaço indicial da FIGURA 13, pode ser observado na FIGURA 18.

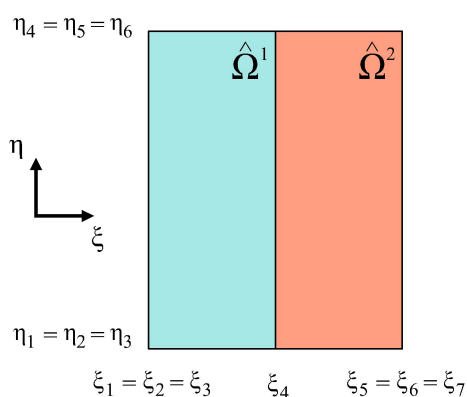


FIGURA 18 – EXEMPLO DE ESPAÇO PARAMÉTRICO.

FONTE: Adaptado de HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS (2005).

3.3.8 Domínio de Integração

O domínio de integração é um domínio quadrado de coordenadas $\tilde{\xi}$ e $\tilde{\eta}$ e delimitado pelo intervalo de -1 a 1 nas duas direções. Neste domínio, visualizado na FIGURA 19, são definidas as posições dos pontos de Gauss para a realização das integrações numéricas das matrizes de rigidez e dos vetores de forças.

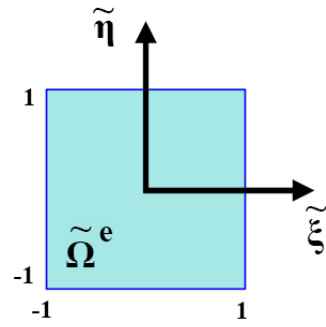


FIGURA 19 – DOMÍNIO DE INTEGRAÇÃO.
FONTE: Adaptado de HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS (2005).

3.3.9 Mapeamento

Para a realização das integrações por quadratura de Gauss é necessário a ocorrência de duas formas de mapeamento. Inicialmente, tem-se o mapeamento geométrico entre o espaço paramétrico e o espaço físico, simbolizado por $\mathbf{X} : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$, o qual é invertido, $\mathbf{X}^{-1} : \Omega \rightarrow \hat{\Omega}$, para que ocorra o mapeamento de um elemento pertencente ao espaço físico, Ω^e , para o espaço paramétrico, $\hat{\Omega}^e$. Na sequência, tem-se o mapeamento afim, que ocorre entre o domínio de integração e o espaço paramétrico, simbolizado por $\Phi : \tilde{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}$, que também é invertido, $\Phi^{-1} : \hat{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$, de tal maneira que se possa mapear um elemento do espaço paramétrico, $\hat{\Omega}^e$, para o domínio de integração, $\tilde{\Omega}^e$. Dessa forma, como apresentado na FIGURA 20, o mapeamento de um elemento do espaço físico Ω^e , para um elemento no domínio de integração, $\tilde{\Omega}^e$, exige a composição de dois mapeamentos, $\mathbf{X}^{-1} : \Omega \rightarrow \hat{\Omega}$ e $\Phi^{-1} : \hat{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$.

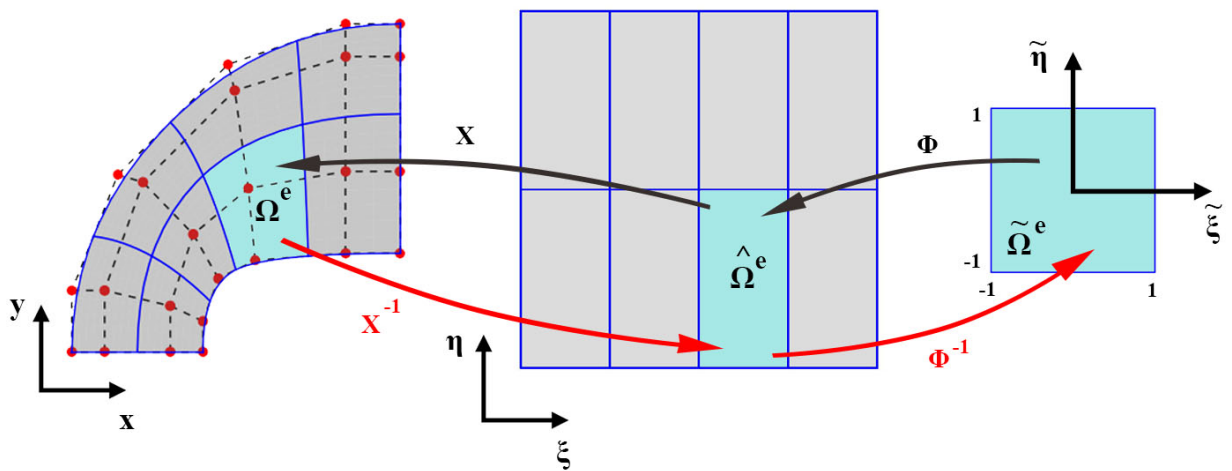


FIGURA 20 – MAPEAMENTOS.
FONTE: O autor (2017).

3.4 REFINAMENTOS

Na Análise Isogeométrica existem três tipos de refinamento: inserção de nó; refinamento p ; refinamento k . O refinamento denominado de inserção de nós consiste na adição de novos nós dentro de um vetor de nós. O refinamento p consiste na elevação de grau das funções. O refinamento k pode ser considerado como uma combinação dos dois refinamentos, refinamento p e inserção de nós.

3.4.1 Inserção de nós

Seja $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ um dado vetor de nós. Ao se inserir um novo nó $\bar{\xi} \in [\xi_k, \xi_{k+1})$, sendo $k > p$, dentro do vetor de nós, é necessário que $\bar{m} = n + 1$ novas funções sejam definidas com o novo vetor de nós $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \bar{\xi}, \xi_{k+1}, \xi_{\bar{m}+p+1}\}$. Consequentemente, \bar{m} novos pontos de controle, $\{\bar{P}\}_{i=1}^{\bar{m}}$, são formados a partir dos pontos de controle originais, $\{P\}_{i=1}^n$, por:

$$\bar{P}_i = \begin{cases} P_1 & i = 1 \\ \alpha_i P_i + (1 - \alpha_i) P_{i-1} & 1 < i < \bar{m} \\ P_n & i = \bar{m} \end{cases} \quad (3.22)$$

onde α_i é obtido por:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & i \leq k - p \\ \frac{\bar{\xi} - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} & k - p + 1 \leq i \leq k \\ 0 & i \geq k + 1 \end{cases} \quad (3.23)$$

A inserção de um nó dentro de um vetor de nós não altera a curva geometricamente e nem parametricamente. Um exemplo de inserção de quatro novos nós pode ser visto na FIGURA 21.

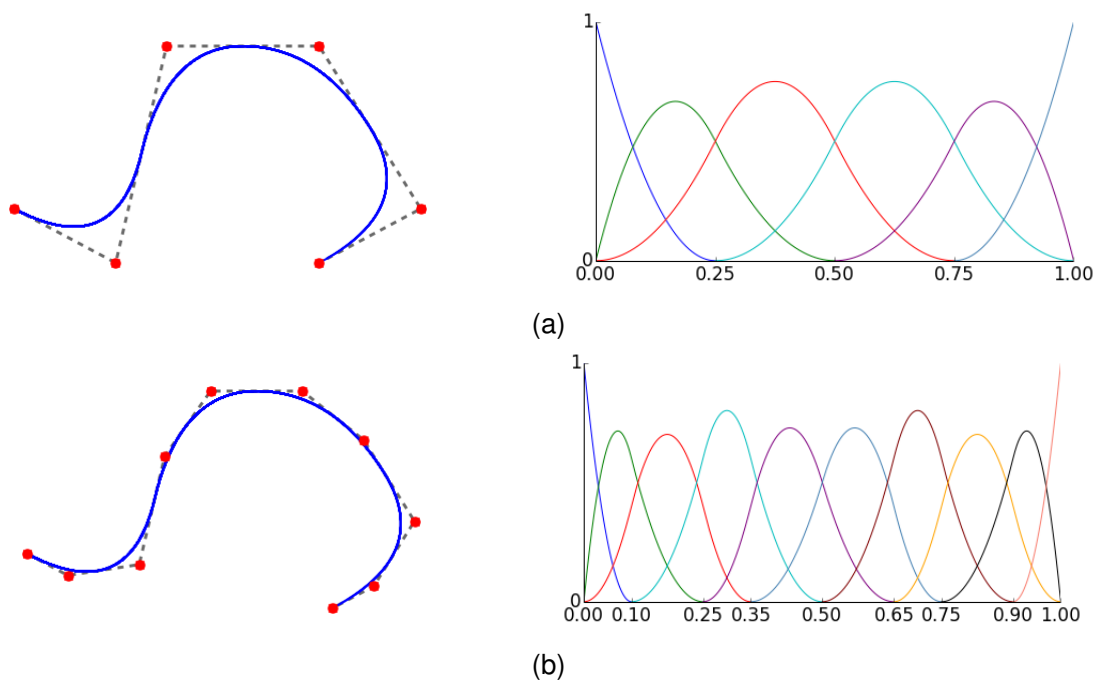


FIGURA 21 – a) CURVA ORIGINAL E FUNÇÕES B-SPLINES. b) CURVA E FUNÇÕES APÓS A INSERÇÃO DE NÓS.

FONTE: O autor (2017).

3.4.2 Refinamento p

No refinamento p o grau das funções são elevadas. Durante o refinamento, cada nó dentro de um vetor de nós tem a sua multiplicidade aumentada, a fim de que a continuidade C^{p-m_i} das funções B-splines sejam preservadas. Um exemplo do refinamento p pode ser visto na FIGURA 22. Pode-se notar na FIGURA 22b que o refinamento p não produz alteração na geometria da curva original.

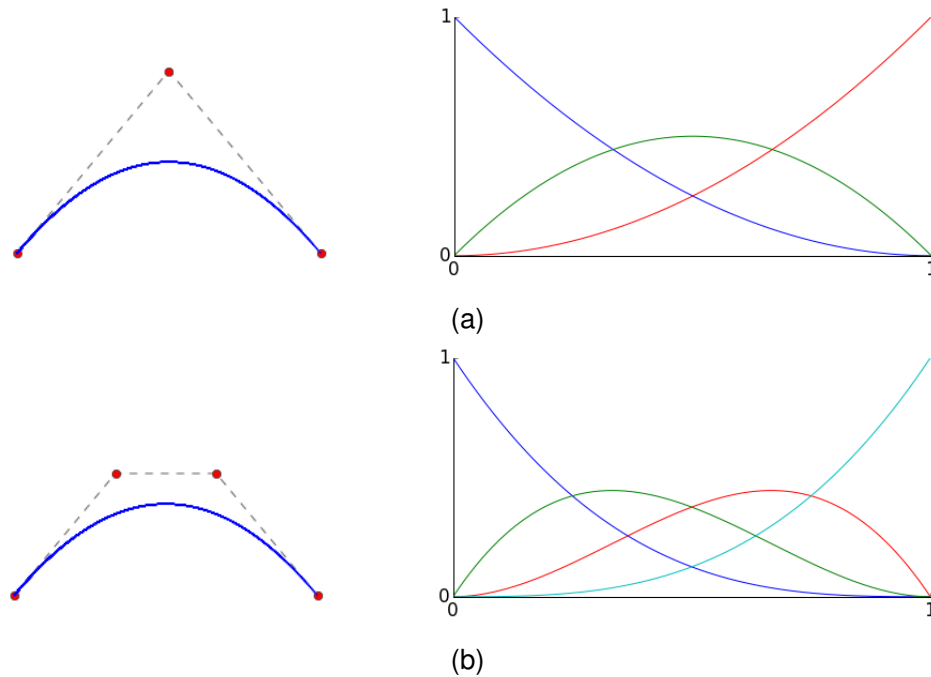


FIGURA 22 – a) CURVA ORIGINAL E FUNÇÕES B-SPLINE GERADAS A PARTIR DO VETOR DE NÓS $\Xi = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$. b) CURVA E FUNÇÕES APÓS A APLICAÇÃO DO REFINAMENTO P, RESULTANDO NO VETOR DE NÓS $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$.

FONTE: O autor (2017).

3.4.3 Refinamento k

O refinamento k pode ser considerado como uma combinação do refinamento p e do refinamento de inserção de nós. No chamado refinamento k "puro", parte-se da malha mais grosseira, ou seja, aquela formada por apenas um elemento, e aplica-se o refinamento p , elevando-se o grau das funções B-splines até o grau desejado e, por consequência, aumentando-se a multiplicidade dos nós do vetor. Logo após, realiza-se a inserção de nó, inserindo-se um novo nó dentro do vetor de nós resultante da elevação de grau. Com isso elevam-se as funções de grau p para o novo grau q , e a continuidade de C^{p-1} para C^{q-1} . O refinamento k não se aproveita do refinamento anterior para uma posterior nova etapa de refinamento, pois sempre parte-se da malha mais grosseira, ou malha inicial, a cada nível de refinamento. Ou seja, só se torna possível a elevação da continuidade para C^{q-1} ao longo do domínio, se o refinamento k for aplicado em um malha inicial composta por um único elemento. Caso exista algum nó intermediário, este terá sua multiplicidade aumentada fazendo com que a continuidade continue sendo C^{p-1} neste ponto. Um exemplo de refinamento k pode ser observado na FIGURA 23.

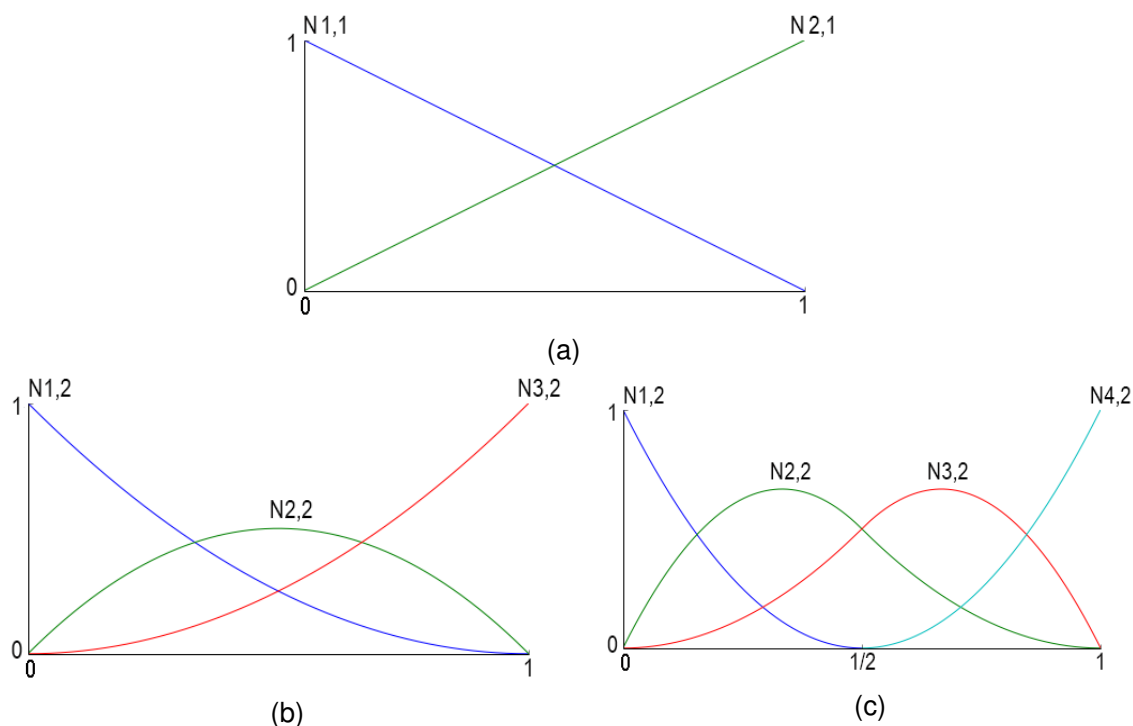


FIGURA 23 – REFINAMENTO K. a) FUNÇÕES B-SPLINES PARA $p = q = 1$ E $\Xi = [0, 0, 1, 1]$. b) ELEVACÃO DA ORDEM DAS FUNÇÕES RESULTANDO EM $p = q = 2$ E $\Xi = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$. c) INSERÇÃO DE NÓ RESULTANDO EM $p = q = 2$ E $\Xi = [0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1]$.

FONTE: O autor (2017).

3.5 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA BASEADA NO USO DAS T-SPLINES

Nesta seção é discutido a aplicação das funções T-splines na Análise Isogeométrica. As T-splines surgiram na literatura da computação gráfica como uma alternativa ao uso das NURBS, com o intuito de corrigir algumas deficiências apresentadas por estas funções. Como exemplos de correções, podem-se citar: supressão dos espaços vazios criados pela junção de múltiplos *patches* NURBS; redução do número de pontos de controle para descrição de uma mesma geometria; possibilidade de refinamentos locais. Essas vantagens percebidas no campo da computação gráfica fizeram com que as T-splines fossem incorporadas na Análise Isogeométrica (BAZILEVS et al., 2010).

Apresentam-se a seguir, os principais conceitos da AIG baseada no uso das T-splines de acordo com os trabalhos de Sederberg et al. (2003), Bazilevs et al. (2010) e Scott et al. (2011).

3.5.1 T-malha

A T-malha pode ser definida como uma malha formada por elementos retangulares, na qual são permitidas as T-junções. As T-junções são formadas pela união de três linhas da malha em um único vértice (o que remete ao formato da letra T) e são os locais onde são permitidas as discontinuidades, como pode ser visto na FIGURA 24. A T-malha é uma

estrutura global da qual são obtidos os vetores de nós locais para construção das T-splines. Caso a T-malha não contenha nenhuma T-junção, as T-splines se tornam as B-splines.

3.5.2 Espaço indicial e Espaço paramétrico

Define-se o espaço indicial de uma T-malha como uma região retangular em \mathbb{R}^2 , de maneira tal que cada lado de cada retângulo tenha um número inteiro associado a si (FIGURA 24a). Esses números inteiros são os mesmos índices utilizados no espaço paramétrico. O espaço paramétrico, por sua vez, é um espaço semelhante ao espaço indicial orientado nas coordenadas paramétricas ξ e η (FIGURA 24b).

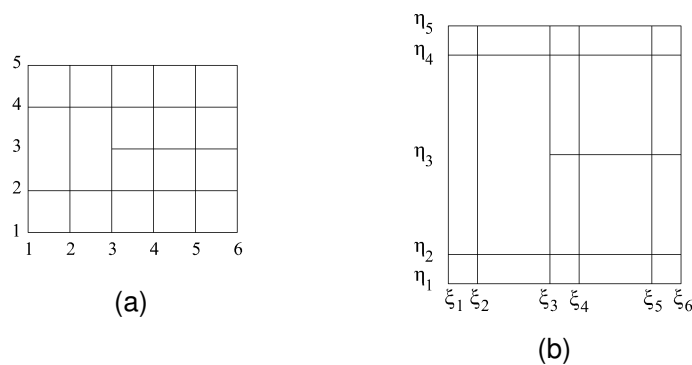


FIGURA 24 – EXEMPLO DE UMA T-MALHA. a) T-MALHA REPRESENTADA NO ESPAÇO INDICIAL. b) T-MALHA REPRESENTADA NO ESPAÇO PARAMÉTRICO.

FONTE: Adaptado de BAZILEVS et al. (2010).

3.5.3 Ancoragem

Para que as funções T-splines possam ser definidas, faz-se necessário a introdução do conceito de ancoragem. A ancoragem é uma forma de se associar os vetores de nós locais e, por consequência, as funções T-splines, com uma localização no espaço indicial. Para isso são utilizadas as denominadas âncoras, simbolizadas por s_α no espaço indicial, ou também representadas no espaço paramétrico e simbolizadas por t_α . A localização da âncora depende do grau da função, e segue a seguinte regra: para funções de grau ímpar, a âncora s_α é localizada nos vértices da T-malha; para funções de grau par, a âncora s_α é localizada nos centros dos retângulos da T-malha.

3.5.4 Vetores de nós locais

As T-splines são definidas a partir de vetores de nós locais, diferentemente das NURBS, que são definidas a partir de vetores de nós globais. Para a obtenção desses vetores, deve-se tratar separadamente os casos para funções de grau ímpar e funções de grau par.

Para o caso de função de grau ímpar, tem-se o seguinte procedimento:

- para cada direção no espaço indicial cria-se um vetor de nós local vazio, Ξ_α e H_α , correspondentes a âncora s_α ;
- na sequência toma-se a localização da âncora $s_\alpha = \{i, j\}$ e inserem-se o nós ξ_i e η_j nos vetores Ξ_α e H_α , respectivamente. Esses nós ficam localizados e são fixados no meio de cada vetor de nós;
- a partir da âncora s_α , caminha-se horizontalmente para a direita até o encontro da próxima linha ortogonal da T-malha e grava-se o seu valor k , então, posiciona-se o nó ξ_k no final do vetor Ξ_α . Continua-se com este processo até serem encontrados um total de $(p + 1)/2$ linhas ortogonais à direita;
- parte-se novamente da âncora s_α , caminha-se horizontalmente para a esquerda até o encontro da próxima linha ortogonal da T-malha e grava-se o seu valor k , então, posiciona-se o nó ξ_k no início do vetor Ξ_α . Continua-se com este processo até serem encontrados um total de $(p + 1)/2$ linhas ortogonais à esquerda;
- de maneira similar, para o vetor de nós H , parte-se da âncora s_α e caminha-se verticalmente para baixo e para cima anotando-se as $(p + 1)/2$ linhas ortogonais encontradas e seus respectivos valores k , adicionando os correspondentes nós η_k dentro do vetor H ;
- para o caso de todas as linhas terem sido encontradas e, no entanto, existirem espaços para que novos nós sejam adicionados, repete-se o último nó gravado naquela direção.

Na FIGURA 25 são apresentados, como exemplos, os esquemas para obtenção dos vetores de nós locais para as âncoras s_α e s_β , referentes à obtenção de uma função bicúbica. Para a âncora s_α (FIGURA 25b), de coordenadas indiciais $\{4, 4\}$, obtém-se os vetores $\Xi_\alpha = \{\xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_6, \xi_7\}$ e $H_\alpha = \{\eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_6, \eta_7\}$. Para a âncora s_β (FIGURA 25c), de coordenadas indiciais $\{2, 3\}$, têm-se os vetores $\Xi_\beta = \{\xi_1, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_6\}$ e $H_\beta = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5\}$

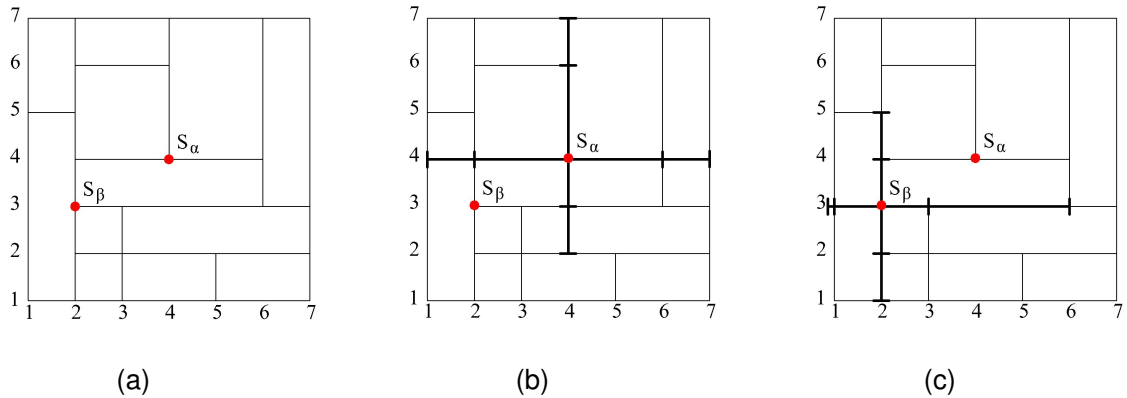


FIGURA 25 – a) ÂNCORAS S_α E S_β PARA FUNÇÕES DE GRAU ÍMPAR. b) ESQUEMA PARA OBTENÇÃO DOS VETORES DE NÓS LOCAIS CORRESPONDENTES À ÂNCORA S_α . c) ESQUEMA PARA OBTENÇÃO DO VETORES DE NÓS LOCAIS CORRESPONDENTES À ÂNCORA S_β .

FONTE: Adaptado de BAZILEVS et al. (2010).

Para o caso de função de grau par, utiliza-se a mesma sequência do procedimento anterior, no entanto, alguns itens sofrem alterações, conforme apresentado abaixo:

- a âncora s_α localiza-se no meio dos retângulos na T-malha, ao invés dos vértices;
- as coordenadas da âncora s_α não são gravadas nos vetores;
- para este caso caminha-se horizontalmente e verticalmente até serem encontrados $p/2 + 1$ linhas ortogonais da T-malha em cada direção.

Na FIGURA 26 são apresentados, como exemplos, os esquemas para obtenção dos vetores de nós locais para as âncoras s_α e s_β , referentes à obtenção de uma função biquadrática. Para a âncora s_α (FIGURA 26b), de coordenadas indiciais $\{3.5, 3.5\}$, obtém-se os vetores $\Xi_\alpha = \{\xi_1, \xi_3, \xi_4, \xi_6\}$ e $H_\alpha = \{\eta_1, \eta_3, \eta_4, \eta_5\}$. Para a âncora s_β (FIGURA 26c), de coordenadas indiciais $\{6, 5.5\}$, têm-se os vetores $\Xi_\beta = \{\xi_3, \xi_5, \xi_7, \xi_7\}$ e $H_\beta = \{\eta_1, \eta_4, \eta_7, \eta_7\}$

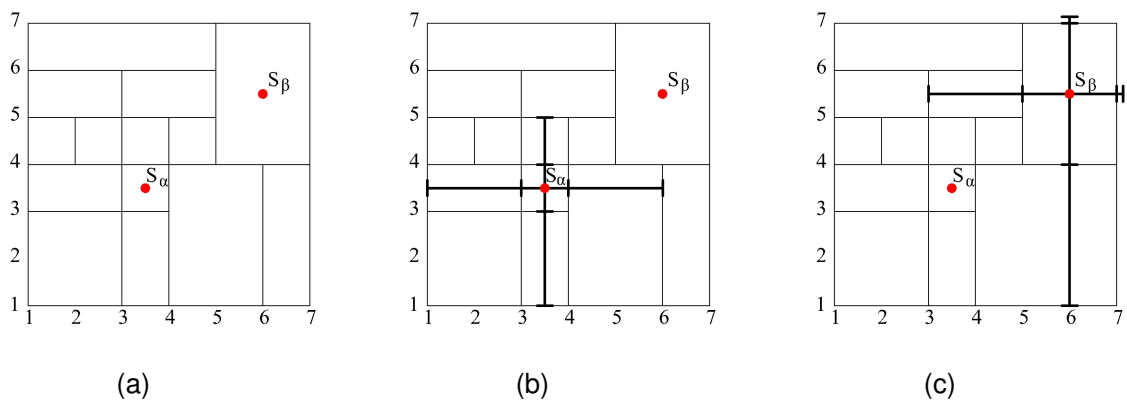


FIGURA 26 – a) ÂNCORAS S_α E S_β PARA FUNÇÕES DE GRAU PAR. b) ESQUEMA PARA OBTENÇÃO DOS VETORES DE NÓS LOCAIS CORRESPONDENTES À ÂNCORA S_α . c) ESQUEMA PARA OBTENÇÃO DO VETORES DE NÓS LOCAIS CORRESPONDENTES À ÂNCORA S_β .

FONTE: Adaptado de BAZILEVS et al. (2010).

3.5.5 Vetor de intervalo de nós local

Outra maneira de armazenar os nós dentro de um vetor de nós local é utilizando o chamado vetor de intervalo de nós local. Um vetor de intervalo de nós é um conjunto não negativo de números reais, $\Delta\Xi = \{\Delta\xi_1, \Delta\xi_2, \dots, \Delta\xi_{p+1}\}$, tal que, $\Delta\xi_i = \xi_{i+1} - \xi_i$. Desse vetor, pode-se extrair o vetor de nós local, $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p+2}\}$. Por exemplo, o vetor $\Xi = \{0, 1, 1.5, 2.5\}$ pode ser representado pelo vetor de intervalo de nós $\Delta\Xi = \{1, 0.5, 1\}$.

3.5.6 Vetor de nós estendido

No caso das T-splines, geralmente, são utilizados os vetores de nós locais não abertos, ou seja, o primeiro e último nó do vetor possuem multiplicidade m_i menor do que $p + 1$. Com o intuito de facilitar a obtenção das funções a partir desses vetores, emprega-se uma técnica para transformar os vetores de nós locais em vetores de nós estendido. A técnica consiste em se aumentar a multiplicidade do primeiro e do último nó até $p + 1$ vezes, resultando em um vetor de nós estendido. Dessa maneira, empregam-se as equações de definição das B-splines (equações (3.1) e (3.2)) para a obtenção de um conjunto de funções referentes a esse vetor de nós estendido. Porém, apenas uma dessas funções corresponde ao vetor de nós local original. Essa função é indentificada com o número $n_t + 1$ (contando da esquerda para a direita), sendo n_t a quantidade de nós adicionados na frente do vetor de nós para a obtenção do vetor de nós estendido

Por exemplo, para a obtenção de uma função quadrática ($p = 2$) a partir do vetor de nós local $\Xi = [0, 0.25, 0.5, 0.75, 1]$, aumenta-se a multiplicidade do primeiro e último nó até 3 vezes, sendo obtido o vetor de nós estendido $\Xi_{est} = [0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1]$ e a partir dele as funções apresentadas na FIGURA 27. Como a quantidade de nós adicionados na frente do vetor é $n_t = 2$, a função desejada é a de número 3, ou seja, a função N_3 .

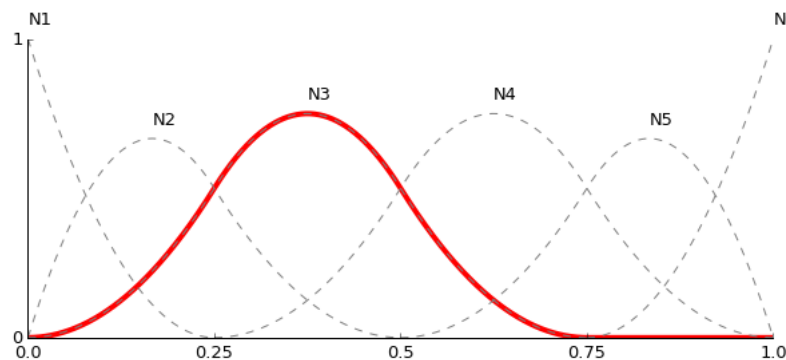


FIGURA 27 – FUNÇÃO N_3 (EM VERMELHO) OBTIDA A PARTIR DO VETOR DE NÓS ESTENDIDO Ξ_{EST} . EM TRACEJADO AS FUNÇÕES QUE NÃO SÃO CONSIDERADAS.

FONTE: O autor (2017).

3.5.7 Funções T-splines

Dada uma T-malha, um grau p , sendo $A \subset \mathbf{Z}$ o conjunto que contém todo α , tal que s_α é uma âncora, e tendo definido Ξ_α e H_α para todo $\alpha \in A$, podem-se definir funções $B_\alpha(\xi, \eta)$ da seguinte maneira:

$$B_\alpha(\xi, \eta) = N_\alpha(\xi)M_\alpha(\eta) \quad (3.24)$$

onde $N_\alpha(\xi)$ e $M_\alpha(\eta)$ são obtidas pelas mesmas equações que são definidas as B-splines, equações (3.1) e (3.2), juntamente com a utilização da técnica do vetor de nós estendido.

Para cada $\alpha \in A$, tem-se o correspondente ponto de controle $\mathbf{P}_\alpha \in \mathbb{R}^2$ e um peso $w_\alpha \in \mathbb{R}$ associado. Dessa maneira, podem-se construir as funções T-splines pela seguinte expressão:

$$R_\alpha(\xi, \eta) = \frac{w_\alpha B_\alpha(\xi, \eta)}{\sum_{\beta \in A} w_\beta B_\beta(\xi, \eta)} \quad (3.25)$$

De maneira semelhante às NURBS, as T-splines têm sua representação no espaço físico dado por:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{\alpha \in A} \mathbf{P}_\alpha R_\alpha(\xi, \eta) \quad (3.26)$$

A continuidade das funções T-splines é determinada pelos seus vetores de nós locais. Cada função de grau p tem C^{p-k} derivadas contínuas no nó de multiplicidade k . As T-splines podem ter diferentes graus de continuidade ao longo de uma T-malha, já que esses valores de continuidade são definidos para funções individuais.

3.5.8 Continuidade

Para determinar a continuidade de um função R_α , correspondente a âncora \mathbf{t}_α no espaço paramétrico, é necessário primeiro considerar o seu suporte \mathbf{D}_α . Tomando como exemplo a T-malha na FIGURA 28a, observa-se que os vetores de nós locais são $\Xi_\alpha = \{\xi_1, \xi_3, \xi_4, \xi_5\}$ e $H_\alpha = \{\eta_1, \eta_2, \eta_4, \eta_5\}$ e, portanto, tem-se $\mathbf{D}_\alpha = [\xi_1, \xi_5] \times [\eta_1, \eta_5]$. Apesar da função R_α corresponder apenas aos nós pertencentes ao seu vetor de nós local, esta se estende por todo suporte \mathbf{D}_α (FIGURA 28c).

Para o exemplo da FIGURA 28, no qual o grau da função é $p = 2$, a máxima continuidade nos nós é C^1 . Para marcar essa continuidade reduzida no espaço paramétrico, aumenta-se a T-malha original estendendo as linhas dos nós ao longo de \mathbf{D}_α , usando linhas tracejadas (FIGURA 28d), as quais são chamadas de linhas de continuidade reduzida. Esse procedimento é repetido para todas as funções T-splines (FIGURA 28e).

A união de todas as linhas da T-malha no espaço paramétrico, inclusive as linhas de continuidade reduzida, representam o conjunto de todas as linhas nas quais a continuidade

das T-splines é menor do que C^∞ . Essa união divide a T-malha em regiões retangulares, nas quais as T-splines apresentam continuidade C^∞ internamente. Essas regiões retangulares definem os elementos T-splines, ou T-elementos, para o propósito das integrações numéricas. Portanto, torna-se essencial a construção da T-malha estendida, no espaço paramétrico, para que esses elementos sejam definidos.

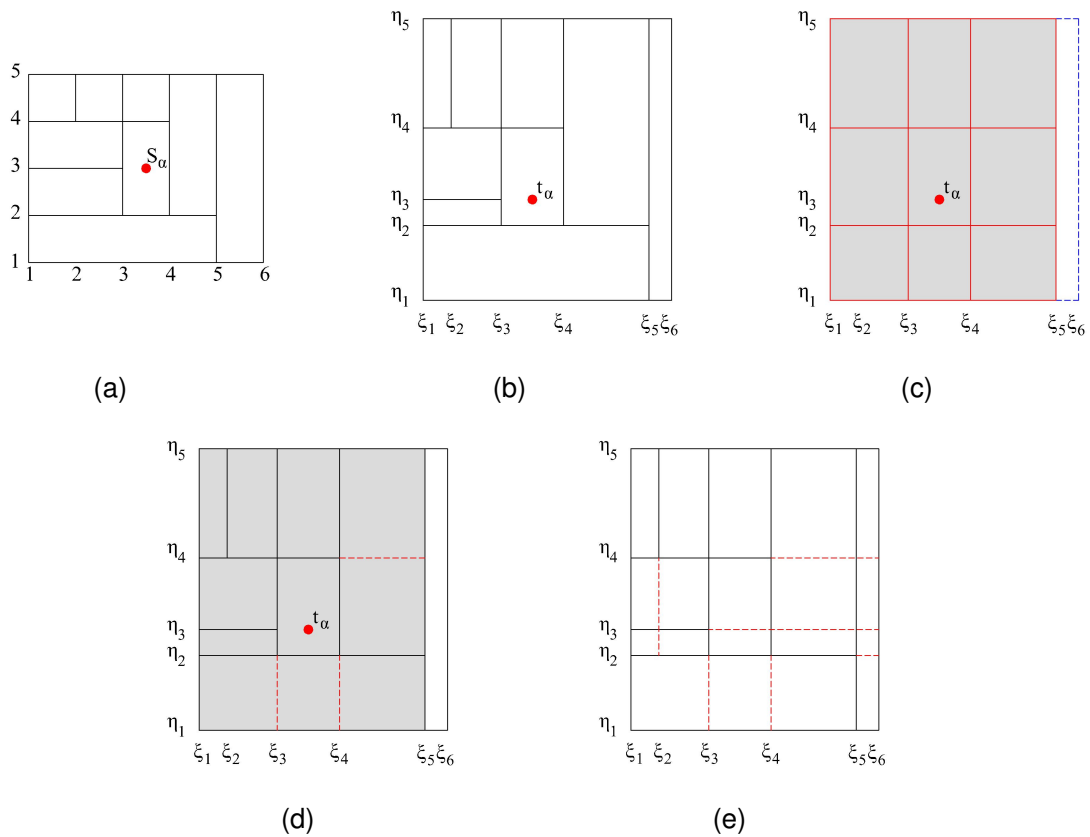


FIGURA 28 – a) T-MALHA REPRESENTADA NO ESPAÇO INDICIAL. b) T-MALHA REPRESENTADA NO ESPAÇO PARAMÉTRICO. c) SUPORTE D_α DA FUNÇÃO R_α . d) LINHAS QUE REPRESENTAM A CONTINUIDADE REDUZIDA DO SUPORTE D_α . e) LINHAS DE CONTINUIDADE REDUZIDAS PARA TODAS AS FUNÇÕES.

FONTE: Adaptado de BAZILEVS et al. (2010).

3.5.9 Exemplo de uma superfície T-spline bicúbica

A fim de compreender melhor a teoria das T-splines, utiliza-se como exemplo a T-malha apresentada em Scott et al. (2011). Inicialmente, observa-se na FIGURA 29a a T-malha representada no espaço indicial e na FIGURA 29b a mesma T-malha no espaço paramétrico, ambas as representações com todas as âncoras destacadas (s_α e t_α). Na FIGURA 30a, podem ser visualizadas as linhas de continuidade reduzida (linhas tracejadas em vermelho) no espaço paramétrico e na FIGURA 30b os elementos definidos para integração numérica.

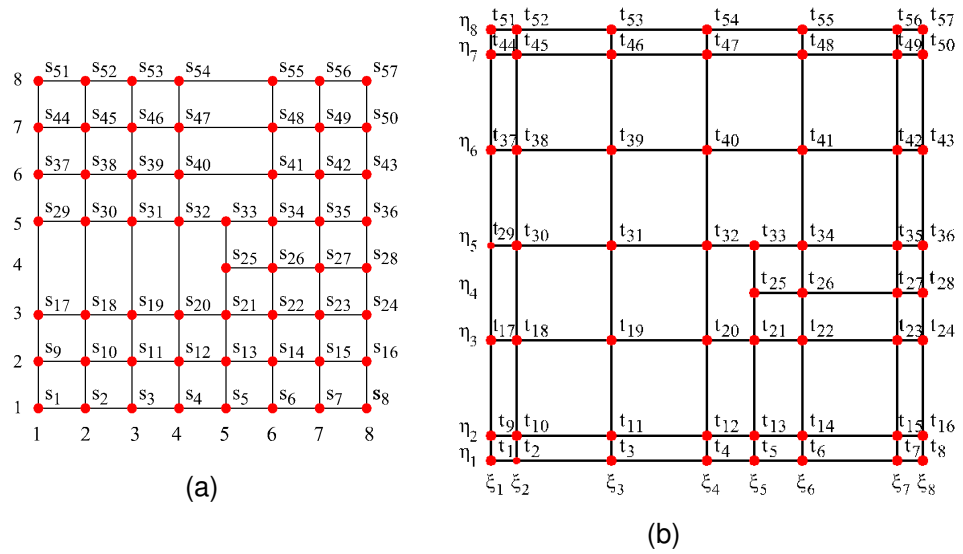


FIGURA 29 – a) T-MALHA REPRESENTADA NO ESPAÇO INDICIAL. b) T-MALHA REPRESENTADA NO ESPAÇO FÍSICO.

FONTE: O autor (2017).

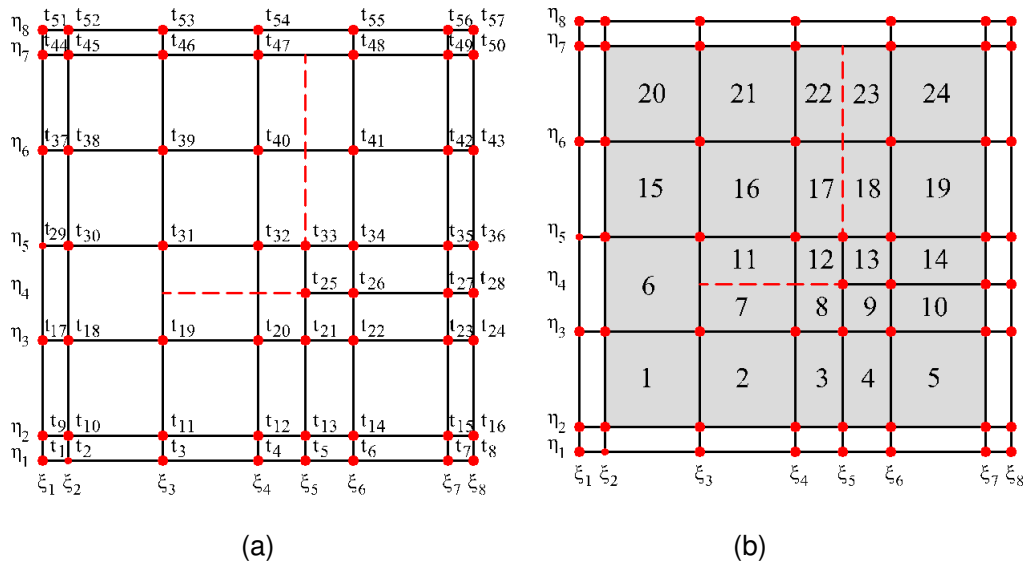


FIGURA 30 – a) LINHAS DE CONTINUIDADE REDUZIDA. b) ELEMENTOS DE ÁREA NÃO NULA UTILIZADOS PARA O PROCESSO DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.

FONTE: O autor (2017).

Na FIGURA 31, tem-se a T-malha representada no espaço físico, onde estão localizados os pontos de controle, os quais possuem uma associação de um para um com os vértices da T-malha do espaço paramétrico, como, por exemplo, t_1 e P_1 .

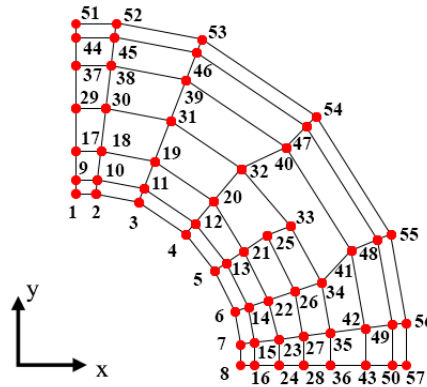
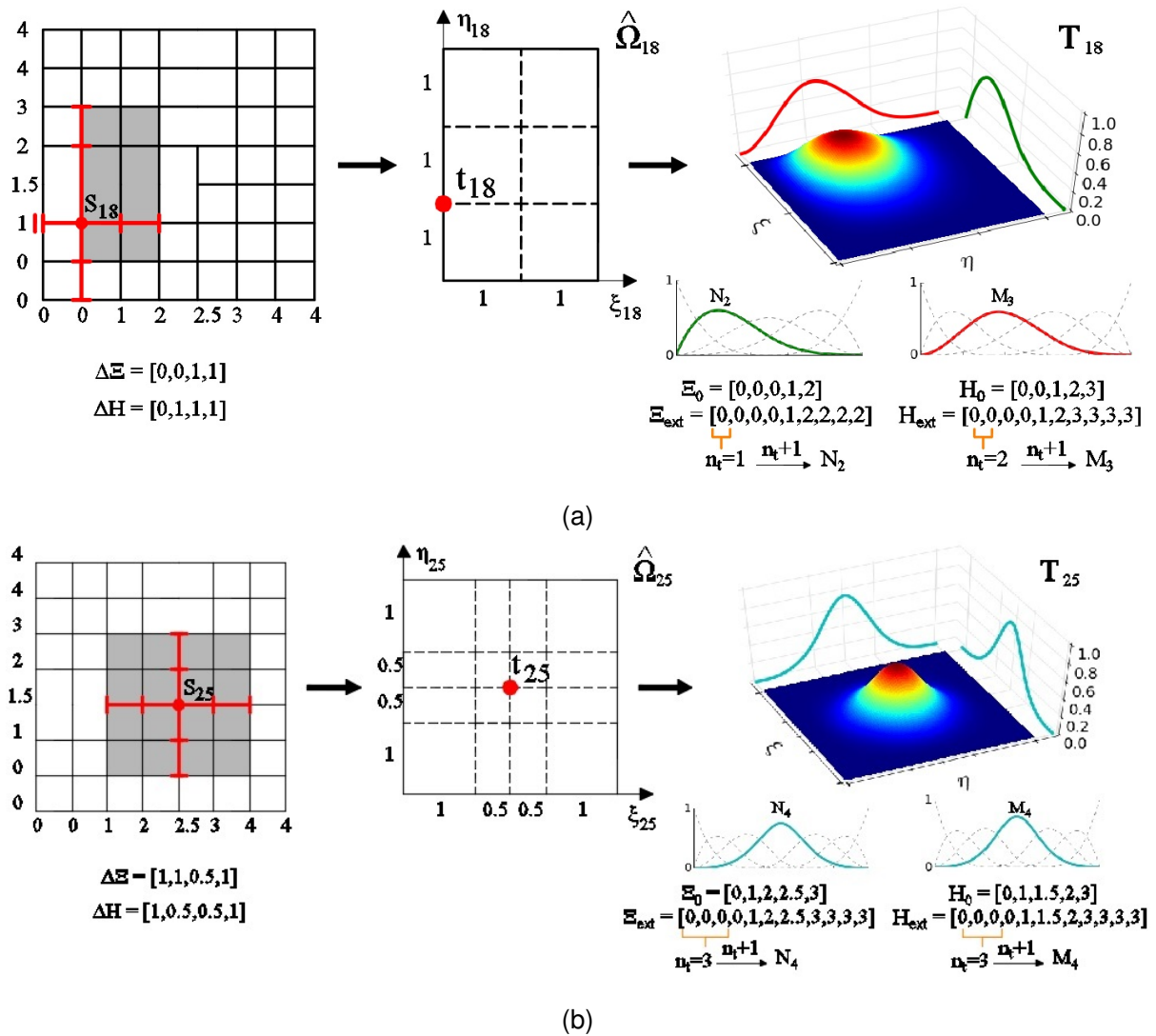


FIGURA 31 – T-MALHA REPRESENTADA NO ESPAÇO FÍSICO.

FONTE: Adaptado de SCOTT et al. (2011).

Exemplos de obtenção das funções T-splines e seus domínios, extraídos do espaço indicial, podem ser vistos na FIGURA 32. Na FIGURA 33 têm-se os elementos T-splines representados no espaço físico.

FIGURA 32 – a) FUNÇÃO T-SPLINE RELACIONADA À ÂNCORA S_{18} . b) FUNÇÃO T-SPLINE RELACIONADA À ÂNCORA S_{25} .

FONTE: O autor (2017).

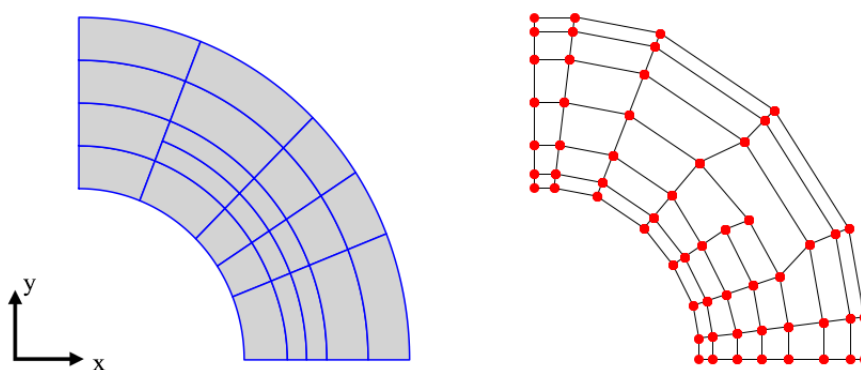


FIGURA 33 – EXIBIÇÃO DOS T-ELEMENTOS NA SUPERFÍCIE T-SPLINE BICÚBICA REPRESENTADA NO ESPAÇO FÍSICO (À ESQUERDA) E A T-MALHA (À DIREITA) SEPARADA DA SUPERFÍCIE PARA MELHOR VISUALIZAÇÃO.

FONTE: O autor (2017).

Apresenta-se na FIGURA 34, como exemplo, um esquema representativo de algumas funções que possuem suporte no elemento 16. Dessa forma, pode-se construir a matriz de conectividade **LEN**, matriz que relaciona as funções locais com as funções globais.

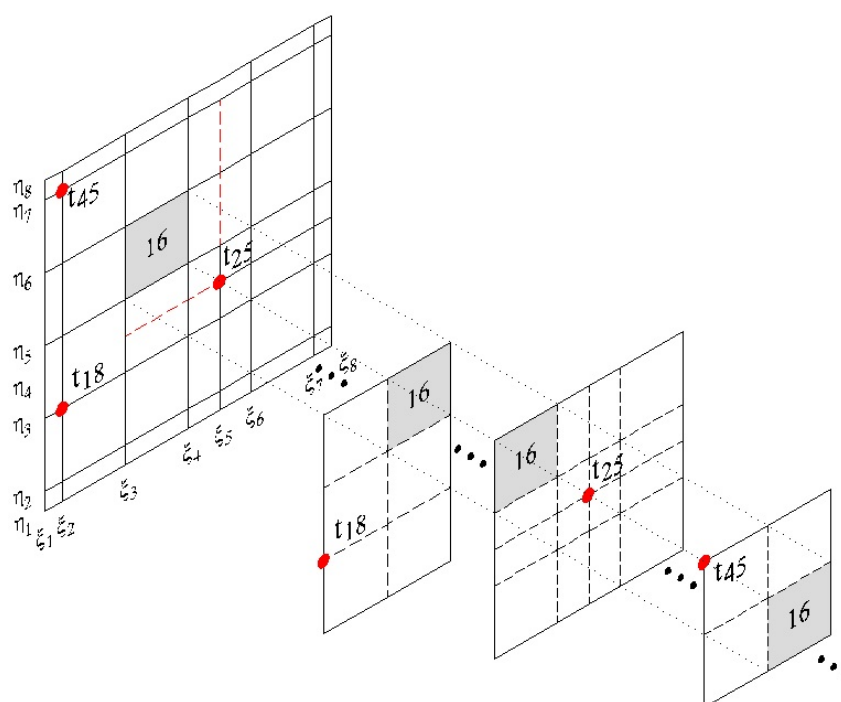


FIGURA 34 – ILUSTRAÇÃO ESQUEMÁTICA DAS FUNÇÕES QUE POSSUEM SUPORTE NO ELEMENTO 16.

FONTE: O autor (2017).

A linha correspondente ao elemento 16 na matriz **LEN** pode ser vista na TABELA 3. Para os demais elementos repete-se o mesmo procedimento.

TABELA 3 – DADOS DA MATRIZ DE CONECTIVIDADE **IEN** RELACIONADO AO ELEMENTO 16

IEN	a (número local da função)															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
elemento=16	18	19	20	25	30	31	32	33	38	39	40	41	45	46	47	48

FONTE: Adaptado de SCOTT et al. (2011).

Os elementos de uma T-malha podem estar no suporte de diferentes quantidades de funções T-splines, ao contrário das NURBS, onde todos os elemento estão no suporte de exatas $(p + 1) \times (q + 1)$ funções base NURBS.

3.6 ESTRUTURAÇÃO DE DADOS BASEADA NA EXTRAÇÃO DE BÉZIER

A estruturação de dados da AIG baseada na Extração de Bézier é uma forma de se representar as funções NURBS em termos dos elementos de Bézier e, por consequência, em termos dos polinômios de Bernstein. Como pode ser visto na sequência, as T-splines também podem ser tratadas da mesma maneira. A extração de Bézier facilita a implementação computacional da AIG, aproximando ainda mais da implementação computacional do MEF. Os conceitos que se seguem foram baseados nos trabalhos de (BORDEN et al., 2011) e (SCOTT et al., 2011).

3.6.1 Decomposição de Bézier

O primeiro passo para o entendimento da estruturação de dados baseado na extração de Bézier é a compreensão do procedimento denominado de decomposição de Bézier. A decomposição de Bézier consiste em se aumentar a multiplicidade dos nós pertencentes a um vetor de nós, utilizando a técnica de inserção de nós, até que todos os nós internos tenham multiplicidade $m_i = p$, sendo p o grau da função. Assim, tem-se como resultado a decomposição das funções base B-splines em um conjunto de elementos C^0 de Bézier, sendo que cada elemento corresponde a um *knot span* do vetor de nós original.

Na FIGURA 35b, observa-se um exemplo das funções resultantes da inserção de nós no vetor $\Xi = [0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1]$ representado na FIGURA 35a. Nesse caso, as funções resultantes da inserção de nós (FIGURA 35b) podem ser chamadas de funções quadráticas de Bézier definidas por partes.

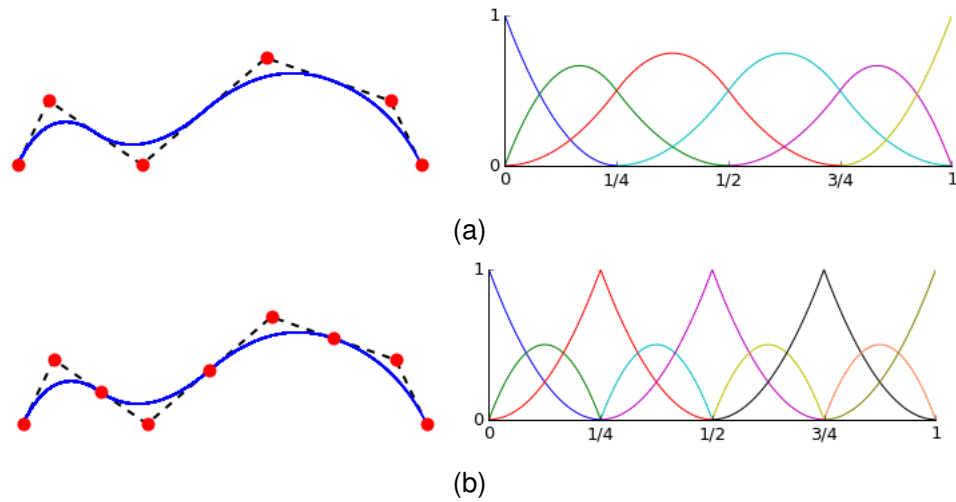


FIGURA 35 – A) CURVA E FUNÇÕES B-SPLINES PARA O VETOR DE NÓS $\Xi = [0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1]$. B) CURVA E FUNÇÕES B-SPLINE PARA O VETOR DE NÓS $\Xi = [0, 0, 0, 0.25, 0.25, 0.5, 0.5, 0.75, 0.75, 1, 1, 1]$.

FONTE: O autor (2017).

3.6.2 Operador de Extração de Bézier

Para que uma curva B-Spline possa ser decomposta em termos de um conjunto de elementos de Bézier, define-se o chamado Operador de Extração de Bézier. Dado um vetor de nós $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, um conjunto de pontos de controle $\mathbf{P} = \{\mathbf{P}_A\}_{A=1}^n$, que defina uma curva B-spline, e seja $\{\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_m\}$ um conjunto de nós necessário para produzir a decomposição de Bézier das funções B-spline, tem-se que para cada ξ_j ($j = 1, 2, \dots, m$) é definido um α_A^j , onde $A = 1, 2, \dots, n + j$ e o A-ésimo α é definido pela equação (3.23). Com base nisso, define-se $\mathbf{C}^j \in \mathbb{R}^{(n+j-1) \times (n+j)}$ como:

$$\mathbf{C}^j = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 - \alpha_2 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1 - \alpha_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 1 - \alpha_4 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & & & 0 & \alpha_{(n+j-1)} & 1 - \alpha_{(n+j)} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Seja $\bar{\mathbf{P}}^1 = \mathbf{P}$, pode-se escrever a equação (3.22) em forma matricial a fim de se representar a sequência de pontos de controle criados pela inserção de nós, como:

$$\bar{\mathbf{P}}^{j+1} = (\mathbf{C}^j)^T \bar{\mathbf{P}}^j \quad (3.28)$$

O conjunto final dos pontos de controle, $\bar{\mathbf{P}}^{m+1}$, definem os elementos de Bézier da decomposição. Seja $\mathbf{P}^b = \bar{\mathbf{P}}^{m+1}$ e $\mathbf{C}^T = (\mathbf{C}^m)^T (\mathbf{C}^{m-1})^T \dots (\mathbf{C}^1)^T$, tem-se:

$$\mathbf{P}^b = \mathbf{C}^T \mathbf{P} \quad (3.29)$$

Sabendo que a inserção de nós não altera a curva geometricamente ou parametricamente e sendo $\mathbf{B}(\xi) = \{\mathbf{B}_A(\xi)\}_{A=1}^{n+m}$ o conjunto de todas as funções base de Bernstein^{1,2} definidas a partir do vetor de nós resultante das inserções de nós, pode-se escrever uma curva B-spline da seguinte maneira³:

$$\mathbf{T}(\xi) = (\mathbf{P}^b)^T \mathbf{B}(\xi) = (\mathbf{C}^T \mathbf{P})^T \mathbf{B}(\xi) = \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{B}(\xi) = \mathbf{P}^T \mathbf{N}(\xi) \quad (3.30)$$

Observa-se na equação (3.30) a relação entre as funções B-spline e os polinômios de Bernstein, que é expressa por:

$$\mathbf{N}(\xi) = \mathbf{C} \mathbf{B}(\xi) \quad (3.31)$$

onde a matriz \mathbf{C} é definida como o operador de extração de Bézier.

Calculando o operador de extração de Bézier para o exemplo da FIGURA 35, obtém-se o seguinte sistema:

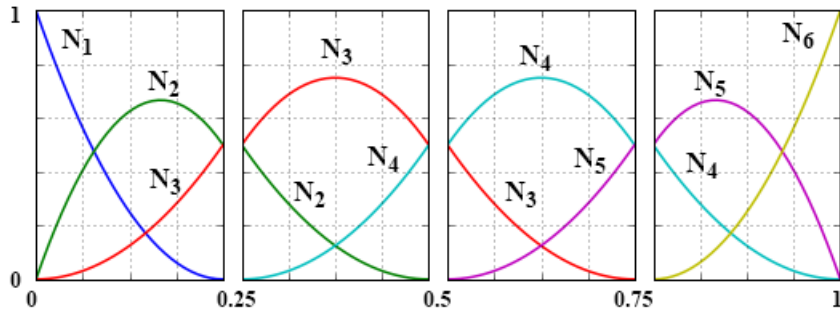
$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \\ B_7 \\ B_8 \\ B_9 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

A decomposição de Bézier resulta em um elemento de Bézier para cada *knot span* do vetor de nós original. A relação das funções B-splines e dos polinômios de Bernstein para cada elemento é exibido na FIGURA 36.

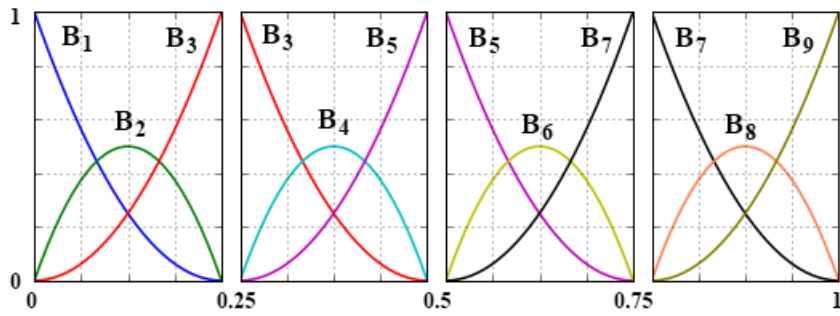
¹Os polinômios de Bernstein tratados neste capítulo têm o seu domínio alterado de $[0, 1]$ para $[-1, 1]$ a fim de se compatibilizar com a aplicação em elementos finitos. Esse assunto é retomado com mais detalhes no capítulo 04.

²O símbolo "v" é utilizado em cima do parâmetro ξ para identificar que as funções são definidas no domínio dos polinômios de Bernstein.

³O parâmetro \mathbf{T} é utilizado neste capítulo para a definição das curvas ao invés do parâmetro \mathbf{C} , que foi utilizado nas seções anteriores, para não se confundir com o parâmetro \mathbf{C} referente ao operador de extração de Bézier.



(a)



(b)

FIGURA 36 – a) FUNÇÕES B-SPLINES. b) DECOMPOSIÇÃO EM ELEMENTOS DE BÉZIER.

FONTE: O autor (2017).

Essas relações, apresentadas na FIGURA 36, são retiradas da matriz apresentada na equação (3.32) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} & \quad \begin{bmatrix} N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_5 \\ B_6 \\ B_7 \end{bmatrix} & \quad \begin{bmatrix} N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_7 \\ B_8 \\ B_9 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Adotam-se ainda as seguintes notações:

$$\begin{bmatrix} N_1^1 \\ N_2^1 \\ N_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} N_1^2 \\ N_2^2 \\ N_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} N_1^3 \\ N_2^3 \\ N_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} N_1^4 \\ N_2^4 \\ N_3^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

$$\begin{bmatrix} B_1^1 \\ B_2^1 \\ B_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} B_1^2 \\ B_2^2 \\ B_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} B_1^3 \\ B_2^3 \\ B_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_5 \\ B_6 \\ B_7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} B_1^4 \\ B_2^4 \\ B_3^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_7 \\ B_8 \\ B_9 \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

onde o sobrescrito é a indicação do número do elemento. As matrizes da expressão (3.33) podem ser escritas de forma sintetizada como:

$$\mathbf{N}^e = \mathbf{C}^e \mathbf{B}^e \quad (3.36)$$

Definindo-se para as direções paramétricas ξ e η os operadores \mathbf{C}_ξ^i e \mathbf{C}_η^j , sendo i e j o i -ésimo e o j -ésimo operadores de extração de Bézier, respectivamente, obtém-se o operador de extração de Bézier para uma superfície pelo produto tensorial, expresso por:

$$\mathbf{C}_A^e = \mathbf{C}_\eta^j \otimes \mathbf{C}_\xi^i \quad (3.37)$$

3.6.3 NURBS em termos de elementos de Bézier

A função racional expressa na equação (3.8) pode ser escrita em forma matricial como:

$$\mathbf{R}(\xi) = \frac{1}{W(\xi)} \mathbf{W} \mathbf{N}(\xi) \quad (3.38)$$

onde \mathbf{W} é a matriz diagonal contendo os pesos, dada por:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_n \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

A função peso pode ser escrita em termos da base de Bernstein:

$$\begin{aligned} W(\xi) &= \sum_{A=1}^n w_A N_A(\xi) = \mathbf{w}^T \mathbf{N}(\xi) = \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{B}(\xi) = \\ &(\mathbf{C}^T \mathbf{w})^T \mathbf{B}(\xi) = (\mathbf{w}^b)^T \mathbf{B}(\xi) = W^b(\xi) \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde $\mathbf{w} = \{w_A\}_{A=1}^n$ e $\mathbf{w}^b = \mathbf{C}^T \mathbf{w}$ é o vetor contendo os pesos associados com as funções base de Bézier.

Sendo \mathbf{W}^b a matriz diagonal definida como:

$$\mathbf{W}^b = \begin{bmatrix} w_1^b & & & \\ & w_2^b & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_{n+m}^b \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

os pontos de controle de Bézier são calculados conforme a seguinte expressão:

$$\mathbf{P}^b = (\mathbf{W}^b)^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{W} \mathbf{P} \quad (3.42)$$

multiplicando por \mathbf{W}^b a expressão anterior, tem-se:

$$\mathbf{W}^b \mathbf{P}^b = \mathbf{C}^T \mathbf{W} \mathbf{P} \quad (3.43)$$

Portanto, para obter uma curva NURBS em termos dos elementos de Bézier, com o uso das equações (3.40) e (3.43), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\xi) &= \sum_{A=1}^n \mathbf{P}_A R_A(\xi) = \mathbf{P}^T \mathbf{R}(\xi) = \frac{1}{W(\xi)} \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{N}(\xi) = \\ &= \frac{1}{W(\xi)} \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{C} \mathbf{B}(\check{\xi}) = \frac{1}{W(\xi)} (\mathbf{C}^T \mathbf{W} \mathbf{P})^T \mathbf{B}(\check{\xi}) = \frac{1}{W^b(\xi)} (\mathbf{W}^b \mathbf{P}^b)^T \mathbf{B}(\check{\xi}) = \mathbf{T}(\check{\xi}) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Uma superfície é, de igual maneira, obtida por:

$$\mathbf{S}(\check{\xi}, \check{\eta}) = \frac{(\mathbf{W}^b \mathbf{P}^b)^T \mathbf{B}(\check{\xi}, \check{\eta})}{W^b(\check{\xi}, \check{\eta})} \quad (3.45)$$

3.6.4 Malha de Controle de Bézier

Os pontos de controle de Bézier podem ser obtidos pela seguinte expressão:

$$\mathbf{Q}^e = (\mathbf{W}^{b,e})^{-1} (\mathbf{C}^e)^T \mathbf{W}^e \mathbf{P}^e \quad (3.46)$$

onde \mathbf{Q}^e são os pontos de controle de Bézier, \mathbf{P}^e os pontos de controle NURBS, $\mathbf{W}^{b,e}$ a matriz diagonal contendo os pesos de Bézier e \mathbf{W}^e a matriz diagonal com os pesos NURBS correspondentes ao elemento e . Um exemplo da malha de controle de Bézier pode ser vista na FIGURA 37, assim como a malha de controle NURBS inicial e a superfície gerada.

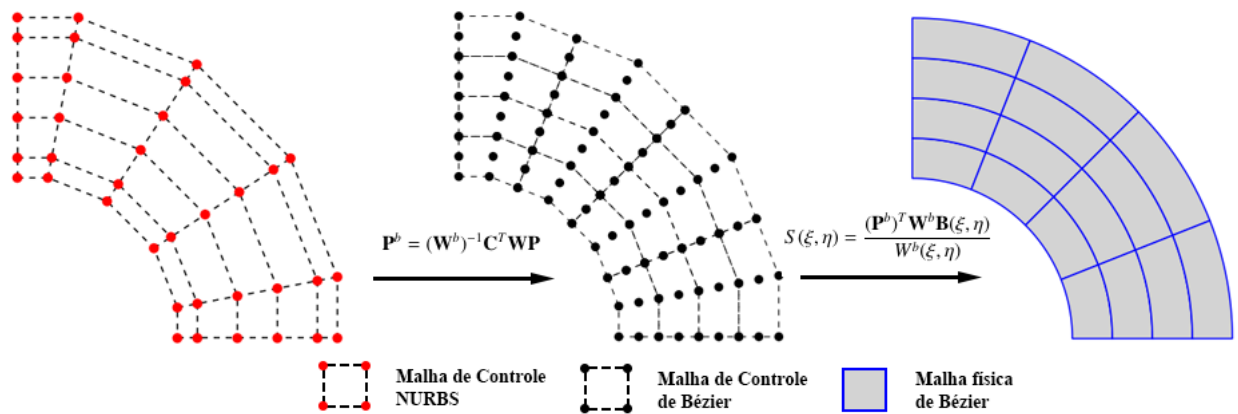


FIGURA 37 – MALHA DE CONTROLE NURBS, MALHA DE CONTROLE DE BÉZIER E MALHA FÍSICA DE BÉZIER.

FONTE: Adaptado de BORDEN et al. (2011).

Como pode ser visto na FIGURA 38, existe uma correspondência de um para um entre os elementos de Bézier e os elementos do espaço paramétrico formado pelo produto tensorial das funções B-splines. Esta informação é utilizada para a construção da matriz de conectividade **IEN**, como pode ser visto em (BORDEN et al., 2011).

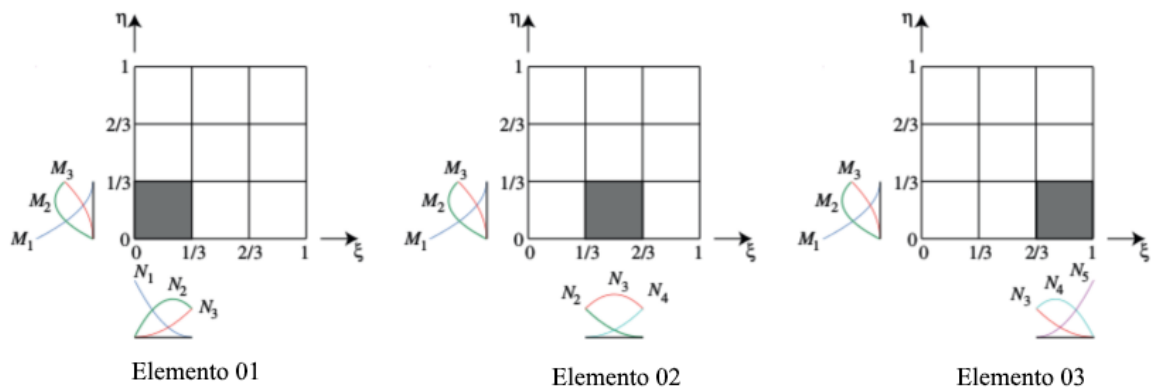


FIGURA 38 – ELEMENTO DE BÉZIER (ELEMENTO DESTACADO EM CINZA) NO ESPAÇO PARAMÉTRICO DAS B-SPLINES. INFORMAÇÃO USADA PARA CONSTRUÇÃO DA MATRIZ **IEN**.

FONTE: Adaptado de BORDEN et al. (2011).

3.7 EXTRAÇÃO DE BÉZIER PARA T-SPLINES

De maneira semelhante às NURBS, é possível a obtenção das funções T-splines através dos operadores de extração de Bézier. Nesta seção são apresentados os principais conceitos encontrados no trabalho de Scott et al. (2011) e Scott et al. (2013).

3.7.1 Operador de Extração de Bézier para T-splines

A principal diferença entre o processo de extração das NURBS e o processo de extração das T-splines é que, como os vetores de nós locais correspondem a funções

individuais, se torna necessário computar apenas uma única linha do operador de extração de cada elemento. Para exemplificar, tem-se na FIGURA 39 o domínio da função T-spline N_{18} e nas FIGURAS 40 e 41 podem ser observadas as equivalências entre as funções B-splines e os polinômios de Bernstein das direções ξ e η , respectivamente, obtidas para este domínio.

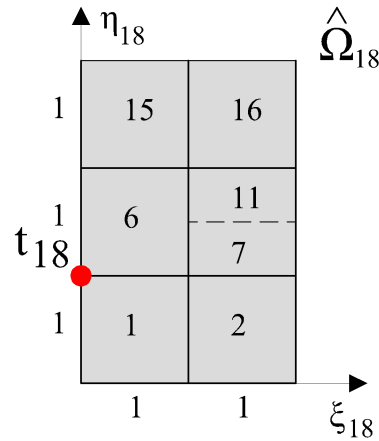


FIGURA 39 – DOMÍNIO DA FUNÇÃO T-SPLINE N_{18} .
FONTE: O autor (2017).

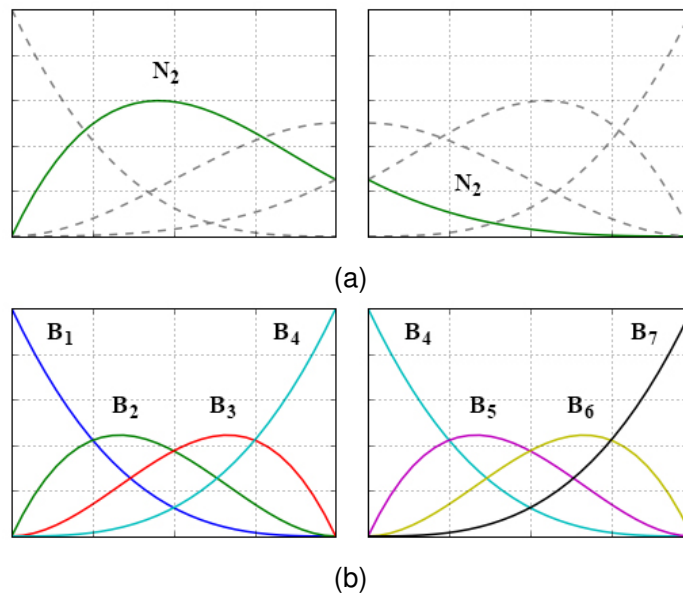


FIGURA 40 – a) FUNÇÃO B-SPLINE N_2 (LINHA SÓLIDA). b) DECOMPOSIÇÃO EM ELEMENTOS DE BÉZIER.

FONTE: O autor (2017).

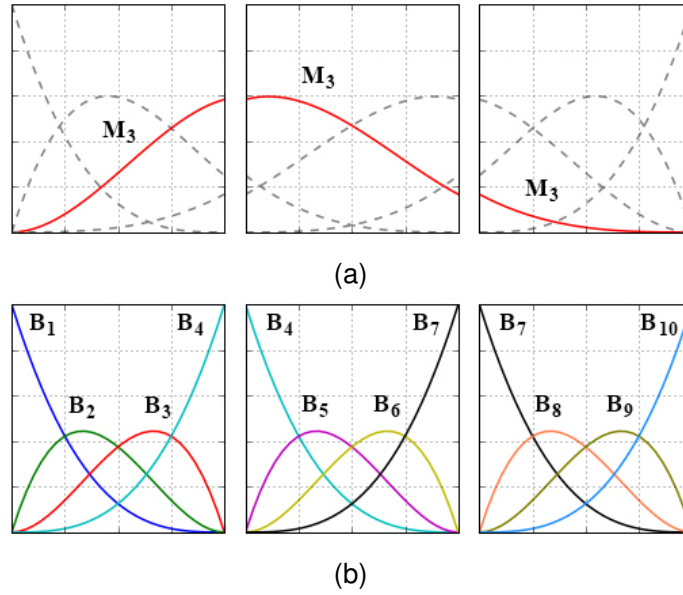


FIGURA 41 – a) FUNÇÃO B-SPLINE M_3 (LINHA SÓLIDA). b) DECOMPOSIÇÃO EM ELEMENTOS DE BÉZIER.

FONTE: O autor (2017).

Nas equações que se seguem, (3.47) e (3.48), podem ser observados os operadores de extração para cada elemento nas direções ξ e η , correspondentes às FIGURAS 40 e 41. As linhas destacadas nos operadores correspondem a única função necessária para o cálculo das funções T-spline.

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0.5 & 0.25 \\ 0. & 0. & 0.5 & 0.5 \\ 0. & 0. & 0. & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0. & 0. & 0. \\ 0.5 & 0.5 & 0. & 0. \\ 0.25 & 0.5 & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 1. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_4 \\ B_5 \\ B_6 \\ B_7 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0.50 & 0.25 \\ 0. & 0. & 0.50 & 0.583 \\ 0. & 0. & 0. & 0.166 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0. & 0. & 0. \\ 0.583 & 0.667 & 0.333 & 0.167 \\ 0.167 & 0.333 & 0.667 & 0.583 \\ 0. & 0. & 0. & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_4 \\ B_5 \\ B_6 \\ B_7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.167 & 0. & 0. & 0. \\ 0.583 & 0.20 & 0. & 0. \\ 0.25 & 0.50 & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 1. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_7 \\ B_8 \\ B_9 \\ B_{10} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Na equação (3.49) observa-se o operador de extração c_2^{1,ξ^T} , linha extraída do operador mostrado na equação(3.47), correspondente ao elemento 01 e função local de número 02 (N_2), na direção ξ .

$$c_2^{1,\xi^T} = \begin{bmatrix} 0. & 1. & 0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Na equação (3.50) observa-se o operador de extração c_3^{1,η^T} , linha extraída do operador mostrado na equação(3.48), correspondente ao elemento 01 e função local de número 03 (M_3), na direção η .

$$c_3^{1,\eta^T} = \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0.50 & 0.583 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

O produto tensorial destes dois vetores gera o vetor $c_{18}^{1^T}$, equação (3.51), o qual contribui com uma linha para compor o operador de extração \mathbf{C}^1 , referente ao elemento 01 da T-malha.

$$c_{18}^{1^T} = \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0.5 & 0.25 & 0.125 & 0. & 0.5833 & 0.2917 & 0.1458 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Para cada elemento dentro do suporte da função N_{18} ($e = 1, 2, 6, 7, 11, 15, 16$), procede-se da mesma maneira, computando-se uma nova linha que contribuirá para a construção do operador de extração correspondente à cada elemento ($\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^2, \mathbf{C}^6, \mathbf{C}^7, \mathbf{C}^{11}, \mathbf{C}^{15}, \mathbf{C}^{16}$).

Dessa forma, cada função T-spline pode ser escrita, sobre o domínio específico de cada elemento de Bézier e , como uma combinação linear dos polinômios de Bernstein pela expressão

$$\mathbf{N}^e(\xi, \eta) = \mathbf{C}^e \mathbf{B}(\xi, \eta) \quad (3.52)$$

onde \mathbf{C}^e é o operador de extração para o elemento e .

Como alternativa, a equação (3.52) pode ser escrita como:

$$N_{A_a}(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^m c_{a,j} B_j(\xi, \eta) \quad (3.53)$$

onde $m = (p_\xi + 1)(p_\eta + 1)$ é o número de polinômios de Bernstein definindo o elemento de Bézier e , A_a a numeração global das funções T-spline não nulas e a a numeração local das

funções. O elemento $c_{a,j}$ faz parte do operador de extração de Bézier, como pode ser visto na sequência:

$$\begin{array}{cccc}
 c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,m} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 c_{a,1} & c_{a,2} & \cdots & c_{a,m} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,m}
 \end{array} \tag{3.54}$$

Mais detalhes sobre a extração de Bézier e como são tratadas as T-junções são discutidos no trabalho de Scott et al. (2011).

4 ANÁLISE ISOGOMÉTRICA APLICADA A PROBLEMAS DA ELASTICIDADE LINEAR

Os conceitos relativos à formulação do problema da elasticidade linear foram extraídos de importantes referências da mecânica do contínuo (MALVERN, 1969) (LAI; RUBIN; KREMPL, 2010), da elasticidade linear (TIMOSHENKO; GOODIER, 1986) e da área de elementos finitos (SZABÓ; BABUŠKA, 1991) (HUGHES, 2000) (REDDY, 2005) (LIU; GU, 2005) (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2013), sendo sintetizados no APÊNDICE A. Nesta seção será exposta a discretização em elementos finitos a partir da formulação fraca do problema, conforme mostrado em Cottrell, Hughes e Bazilevs (2009) e seguindo a formatação apresentada em Hughes (2000), Fish e Belytschko (2007) e Bente (2011).

4.1 DISCRETIZAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS

A obtenção da formulação fraca da elasticidade linear pode ser vista em detalhes no APÊNDICE A. Para os problemas tratados neste trabalho, a formulação fraca segue a seguinte notação:

$$\int_{\Omega} (\nabla_s \mathbf{w})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Gamma_t} \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{w}^T \mathbf{f} d\Omega \quad (4.1)$$

onde ∇_s é a matriz contendo os operadores diferenciais, expressa por:

$$\nabla_s = \begin{bmatrix} \partial/\partial_x & 0 \\ 0 & \partial/\partial_y \\ \partial/\partial_y & \partial/\partial_x \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

e os vetores \mathbf{w} , \mathbf{f} , $\bar{\mathbf{t}}$, $\boldsymbol{\sigma}$, que correspondem às funções peso, às forças de corpo, às forças de superfície e às tensões, respectivamente, são representados da seguinte maneira:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

O vetor $\boldsymbol{\sigma}$, o qual contém as componentes de tensão, pode ser expresso por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \nabla_s \mathbf{u} = \mathbf{D} \nabla_s \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

onde \mathbf{D} é a matriz constitutiva, $\boldsymbol{\epsilon}$ é o vetor contendo as componentes de deformação e \mathbf{u} é o vetor contendo as componentes do deslocamento.

A matriz constitutiva \mathbf{D} pode ser aplicada tanto para as condições do estado plano de tensões quanto para as condições do estado plano de deformações. Para o estado plano de tensões, tem-se:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

e para o estado plano de deformações, a matriz \mathbf{D} é dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Substituindo a equação (4.4) na equação (4.1), obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\nabla_s \mathbf{w})^T \mathbf{D} \nabla_s \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{w}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (4.7)$$

Para a obtenção da formulação em elementos finitos, aplica-se o Método de Galerkin. Com base nesse método, as denominadas funções tentativas são aplicadas na formulação fraca do problema. Além disso, realiza-se a discretização em elementos finitos do problema, a qual consiste na divisão do domínio Ω em vários elementos. Assim sendo, computa-se a formulação fraca no domínio Ω somando-se as integrais computadas sobre cada elemento Ω^e do domínio, da seguinte maneira:

$$\sum_{e=1}^{nel} \left\{ \int_{\Omega^e} (\nabla_s \hat{\mathbf{w}}^e)^T \mathbf{D}^e \nabla_s \hat{\mathbf{u}}^e d\Omega^e - \int_{\Gamma_t^e} \hat{\mathbf{w}}^{eT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma^e - \int_{\Omega^e} \hat{\mathbf{w}}^{eT} \mathbf{f} d\Omega^e \right\} = 0 \quad (4.8)$$

onde n_{el} é o número total de elementos, $\hat{\mathbf{w}}^e$ é o vetor das funções peso, $\hat{\mathbf{u}}^e$ o vetor das funções tentativas e o sobrescrito e faz referência a cada elemento do domínio Ω . As funções tentativas $\hat{\mathbf{u}}^e$ e as funções peso $\hat{\mathbf{w}}^e$ são expressas em termos das funções NURBS:

$$\hat{\mathbf{u}}^e(x, y) = \mathbf{R}^e \mathbf{u}^e \quad (x, y) \in \Omega^e \quad (4.9)$$

$$\hat{\mathbf{w}}^e(x, y) = \mathbf{R}^e \mathbf{w}^e \quad (x, y) \in \Omega^e \quad (4.10)$$

sendo \mathbf{u}^e e \mathbf{w}^e dados por:

$$\mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} u_{x1}^e & u_{y1}^e & u_{x2}^e & u_{y2}^e & \cdots & u_{xn_{en}}^e & u_{yn_{en}}^e \end{bmatrix}^T \quad (4.11)$$

$$\mathbf{w}^e = \begin{bmatrix} w_{x1}^e & w_{y1}^e & w_{x2}^e & w_{y2}^e & \cdots & w_{xn_{en}}^e & w_{yn_{en}}^e \end{bmatrix}^T \quad (4.12)$$

e a matriz \mathbf{R}^e , que contém as funções de forma, expressa por:

$$\mathbf{R}^e = \begin{bmatrix} R_1^e & 0 & R_2^e & 0 & \cdots & R_{n_{en}}^e & 0 \\ 0 & R_1^e & 0 & R_2^e & \cdots & 0 & R_{n_{en}}^e \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

onde n_{en} é o número de funções que possuem suporte no elemento e .

Sabendo-se que $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}^e$ pode ser escrito como:

$$\nabla_s \hat{\mathbf{u}}^e = \nabla_s \mathbf{R}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{u}^e \quad (4.14)$$

onde:

$$\mathbf{B}^e = \nabla_s \mathbf{R}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial R_2^e}{\partial x} & 0 & \cdots & \frac{\partial R_{n_{en}}^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial R_1^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial R_2^e}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial R_{n_{en}}^e}{\partial y} \\ \frac{\partial R_1^e}{\partial y} & \frac{\partial R_1^e}{\partial x} & \frac{\partial R_2^e}{\partial y} & \frac{\partial R_2^e}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial R_{n_{en}}^e}{\partial y} & \frac{\partial R_{n_{en}}^e}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Substituindo as equações (4.14) e (4.10) em (4.8), tem-se:

$$\sum_{e=1}^{nel} \left\{ \int_{\Omega^e} \mathbf{w}^{eT} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e \mathbf{u}^e d\Omega^e - \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{w}^{eT} \mathbf{R}^{eT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma^e - \int_{\Omega^e} \mathbf{w}^{eT} \mathbf{R}^{eT} \mathbf{f} d\Omega^e \right\} = 0 \quad (4.16)$$

Considerando as seguintes notações:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e d\Omega^e \quad (4.17)$$

$$\mathbf{F}^e = \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{R}^{eT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma^e + \int_{\Omega^e} \mathbf{R}^{eT} \mathbf{f} d\Omega^e \quad (4.18)$$

e denominando \mathbf{K}^e por matriz de rigidez e \mathbf{F}^e por vetor de forças externo, pode-se reescrever a equação (4.16):

$$\sum_{e=1}^{nel} \mathbf{w}^{eT} \{ \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e - \mathbf{F}^e \} = 0 \quad (4.19)$$

Considerando-se \mathbf{w} arbitrário e montando-se o sistema global, com base nas matrizes de conectividade \mathbf{IEN} e \mathbf{INC} , o problema discreto se torna:

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (4.20)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez global e \mathbf{F} o vetor de força global.

O vetor \mathbf{d} que contém todas as componentes de deslocamento de todos os pontos de controle, pode ser escrito como:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} u_{x1} & u_{y1} & u_{x2} & u_{y2} & \cdots & u_{xn_{np}} & u_{yn_{np}} \end{bmatrix}^T \quad (4.21)$$

onde n_{np} é o número de pontos de controle¹. Ressalta-se que na AIG os graus de liberdade estão contidos nos pontos de controle. Por exemplo, o ponto de controle \mathbf{P}_1 contém os graus de liberdade u_{x1} e u_{y1} , correspondentes aos deslocamentos nas direções horizontal e vertical, respectivamente.

4.2 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

As integrações necessárias para obtenção da matriz de rigidez e do vetor de força são realizadas por meio de integração numérica por quadratura Gauss. Devido a existência de dois mapeamentos, $\Phi : \tilde{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}$ e $\mathbf{X} : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$, destacam-se na sequência alguns detalhes a respeito da obtenção das derivadas das funções NURBS e do Jacobiano.

Devido à ocorrência do mapeamento do domínio de integração para o espaço paramétrico, $\Phi : \tilde{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}$, faz-se necessário o cálculo da seguinte matriz Jacobiana:

$$\mathbf{J}_{\xi, \tilde{\xi}} = \begin{bmatrix} \xi_{, \tilde{\xi}} & 0.0 \\ 0.0 & \eta_{, \tilde{\eta}} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

onde $\xi_{, \tilde{\xi}}$ e $\eta_{, \tilde{\eta}}$ são dados por:

$$\xi_{, \tilde{\xi}} = \frac{(\xi_{i+1} - \xi_i)}{2} \quad (4.23)$$

$$\eta_{, \tilde{\eta}} = \frac{(\eta_{j+1} - \eta_j)}{2} \quad (4.24)$$

De maneira análoga, para o mapeamento do espaço paramétrico ao espaço físico, $\mathbf{X} : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$, tem-se a seguinte matriz Jacobiana:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}, \xi} = \begin{bmatrix} x_{, \xi} & x_{, \eta} \\ y_{, \xi} & y_{, \eta} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

sabendo que x e y são dados pelas seguintes expressões:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij}(\xi, \eta) x_{ij} \quad (4.26)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij}(\xi, \eta) y_{ij} \quad (4.27)$$

¹O símbolo n_{np} também corresponde ao número de funções base.

as componentes da matriz $\mathbf{J}_{\mathbf{x},\xi}$ são obtidas pelas seguintes derivadas:

$$x_{,\xi}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij,\xi}(\xi, \eta) x_{ij} \quad (4.28)$$

$$y_{,\xi}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij,\xi}(\xi, \eta) y_{ij} \quad (4.29)$$

$$x_{,\eta}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij,\eta}(\xi, \eta) x_{ij} \quad (4.30)$$

$$y_{,\eta}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij,\eta}(\xi, \eta) y_{ij} \quad (4.31)$$

onde $R_{ij,\xi}(\xi, \eta)$, $R_{ij,\eta}(\xi, \eta)$ são as derivadas das funções NURBS com respeito às coordenadas paramétricas ξ e η , respectivamente, e x_{ij} e y_{ij} são as coordenadas dos pontos de controle.

Dessa forma, a matriz Jacobiana que representa o mapeamento direto do domínio auxiliar para o espaço físico é obtida com o uso da regra da cadeia, que é obtida da seguinte maneira:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\mathbf{x},\xi} \mathbf{J}_{\xi,\tilde{\xi}} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{,\tilde{\xi}} & 0.0 \\ 0.0 & \eta_{,\tilde{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} \xi_{,\tilde{\xi}} & x_{,\eta} \eta_{,\tilde{\eta}} \\ y_{,\xi} \xi_{,\tilde{\xi}} & y_{,\eta} \eta_{,\tilde{\eta}} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

O Jacobiano, portanto, é obtido pelo determinante da matriz Jacobiana \mathbf{J} :

$$J = |\mathbf{J}| \quad (4.33)$$

Com base nisso, a matriz de rigidez para um elemento qualquer pode ser obtida, via quadratura de Gauss, por:

$$\mathbf{K}^e = \sum_{l=1}^{ngp_{\xi}} \sum_{m=1}^{ngp_{\eta}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} J w_{gp_{\xi}} w_{gp_{\eta}} \quad (4.34)$$

onde ngp_{ξ} e ngp_{η} são a quantidade de pontos de Gauss nas direções $\tilde{\xi}$ e $\tilde{\eta}$ do domínio de integração, respectivamente, e $w_{gp_{\xi}}$ e $w_{gp_{\eta}}$ são os pesos associados a esses pontos. De maneira análoga também se procede para o cálculo do vetor de forças.

Para a obtenção da matriz \mathbf{B} , é necessário a obtenção das derivadas das funções NURBS em relação ao espaço físico. Para tanto, calcula-se a inversa da matriz Jacobiana $\mathbf{J}_{\mathbf{x},\xi}$:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x},\xi}^{-1} = \begin{bmatrix} \xi_{,x} & \xi_{,y} \\ \eta_{,x} & \eta_{,y} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Assim sendo, utilizam-se as componentes da matriz $\mathbf{J}_{\mathbf{x},\xi}^{-1}$ e as derivadas das funções NURBS com respeito às coordenadas paramétricas para o cálculo das derivadas das funções NURBS com respeito às coordenadas do espaço físico, da seguinte maneira:

$$R_{ij,x} = R_{ij,\xi} \xi_{,x} + R_{ij,\eta} \eta_{,x} \quad (4.36)$$

$$R_{ij,y} = R_{ij,\xi} \xi_{,y} + R_{ij,\eta} \eta_{,y} \quad (4.37)$$

4.3 EXTRAÇÃO DE BÉZIER NA FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

Nesta seção, de forma sintetizada, são apresentadas algumas observações importantes a respeito da aplicação da AIG baseada na extração de Bézier na formulação de elementos finitos. Essas informações são baseadas nos trabalhos de Borden et al. (2011) e Scott et al. (2011), onde podem ser vistos maiores detalhes.

As funções base de Bernstein são definidas no intervalo $[0, 1]$. No entanto, para facilitar a integração por quadratura de Gauss, pode-se definir as funções bases de Bernstein no intervalo $[-1, 1]$ pela seguinte equação:

$$B_{a,p}(\check{\xi}) = \frac{1}{2}(1 - \check{\xi})B_{a,p-1}(\check{\xi}) + \frac{1}{2}(1 + \check{\xi})B_{a-1,p-1}(\check{\xi}) \quad (4.38)$$

onde:

$$B_{1,0}(\check{\xi}) = 1 \quad (4.39)$$

e

$$B_{a,p}(\check{\xi}) = 0 \quad \text{se } a < 1 \quad \text{ou } a > p + 1 \quad (4.40)$$

Para esse caso, o mapeamento entre o domínio de integração e o espaço físico se torna mais simplificado e, como consequência, o jacobiano correspondente a esse mapeamento pode ser calculado diretamente por:

$$J = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \check{\xi}} \right| \quad (4.41)$$

4.4 AVALIAÇÃO DA CONVERGÊNCIA DAS SOLUÇÕES

Uma forma de avaliar a convergência das soluções numéricas é através do cálculo do erro na norma em energia (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2013), definida por:

$$\|e_E\| = \left[\int_{\Omega} (\epsilon - \hat{\epsilon})^T \mathbf{D} (\epsilon - \hat{\epsilon}) d\Omega \right]^{1/2} \quad (4.42)$$

onde ϵ é a deformação decorrente da solução analítica, $\hat{\epsilon}$ é a deformação numérica e \mathbf{D} é a matriz constitutiva. Essa norma pode ser calculada para cada elemento do domínio Ω e depois, as contribuições elementares, podem ser somadas para computar o erro da norma em energia em todo o domínio, como:

$$\|e_E\| = \left(\sum_{K=1}^{nel} \|e_E\|_K^2 \right)^{1/2} \quad (4.43)$$

Dessa forma, pode-se definir o erro relativo na norma em energia, da seguinte maneira:

$$(e_E)_{rel} = \frac{\|e_E\|}{\|u_E\|} \quad (4.44)$$

onde $\|u_E\|$ é a norma em energia da solução exata, dada por:

$$\|u_E\| = \left[\int_{\Omega} \epsilon^T \mathbf{D} \epsilon d\Omega \right]^{1/2} \quad (4.45)$$

Nota-se na equação (4.45) que $\|u_E\|$ é igual a raiz quadrada do dobro da energia de deformação, que é expressa por:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon^T \mathbf{D} \epsilon d\Omega \quad (4.46)$$

Assim sendo, como alternativa, também pode-se avaliar a convergência da solução com base no erro relativo na energia de deformação, que é dada por:

$$(e_U)_{rel} = \frac{|U - \hat{U}|}{U} \quad (4.47)$$

5 RESULTADOS

Para o estudo da Análise Isogeométrica baseada no uso das T-splines foram escolhidos alguns problemas clássicos na literatura da elasticidade linear, como problemas de chapas sob tração, um problema de uma viga sob deslocamento prescrito e também um problema de uma barragem sob pressões hidrostáticas.

Para auxiliar na aplicação da AIG baseada nas T-splines optou-se pela utilização do *software* Rhino (Robert Mcneel & Associados, 2017). Esse *software*, conforme explicado no APÊNDICE C, permite que sejam geradas geometrias com o uso das T-splines e, com o uso de um *plugin*, que sejam extraídas as informações necessárias, no formato da estruturação de dados da extração de Bézier, para a aplicação numérica na AIG. Devido ao fato do *software* apenas gerar funções T-splines de grau três, todas as funções utilizadas nos problemas estudados são bicúbicas. Dessa forma, também optou-se por utilizar, para efeito de comparação, NURBS bicúbicas e elementos de Lagrange bicúbicos. Além disso, para o último exemplo estudado, são realizadas comparações com os resultados obtidos através do *software* ABAQUS (DASSAULT, 2017).

Os algoritmos utilizados para o estudo da Análise Isogeométrica foram implementados pelo autor na linguagem de programação Python, dentro do ambiente de desenvolvimento Spyder (Continuum Analytics, 2017).

Todas as análises realizadas neste trabalho recebem uma identificação, que são atribuídas de acordo com as seguintes nomenclaturas:

- MEF-Q16-REF.1:1 - Análise pelo Método dos Elementos Finitos com elementos de Lagrange de 16 nós e proporção¹ entre o número de elementos de 1:1;
- MEF-Q16-REF.1:2 - Análise pelo Método dos Elementos Finitos com elementos de Lagrange de 16 nós e proporção entre o número de elementos de 1:2;
- AIG-NURBS-CLÁSSICA-G3-REF.1:1 - Análise Isogeométrica baseada em NURBS com a formulação clássica, ou seja, sem extração de Bézier, proporção entre o número de elementos de 1:1 e funções de grau 3;
- AIGB-NURBS-G3-REF.1:1 - Análise Isogeométrica baseada em NURBS utilizando a extração de Bézier, proporção entre o número de elementos de 1:1 e funções de grau 3;

¹O termo proporção é utilizado para se referir à relação entre a quantidade de elementos nas duas direções paramétricas (ξ, η) , do espaço paramétrico, que são mapeados para o espaço físico de coordenadas x e y . A proporção 1:1 significa que o número de elementos é igual nas duas direções e a proporção 1:2 significa que uma direção possui o dobro de elementos da outra direção.

- AIGB-NURBS-G3-REF.1:2 - Análise Isogeométrica baseada nas NURBS utilizando a extração de Bézier, proporção entre o número de elementos de 1:2 e funções de grau 3;
- AIGB-NURBS-G3-REF.NU - Análise Isogeométrica baseada nas NURBS utilizando a extração de Bézier, refinamento não uniforme e funções de grau 3;
- AIGB-TSPLINE-1 - Análise Isogeométrica baseada nas T-splines utilizando a extração de Bézier, primeira modelagem;
- AIGB-TSPLINE-2 - Análise Isogeométrica baseada nas T-splines utilizando a extração de Bézier, segunda modelagem.

Os critérios adotados para a escolha da proporção dos elementos das malhas e para a escolha das regiões de aplicação dos refinamentos foram baseados no trabalho de Nguyen-Thanh et al. (2011). Dessa maneira, as malhas não uniformes são refinadas de acordo com a distribuição das tensões de Von Mises, ou seja, as regiões que apresentam uma maior concentração de tensões são mais bem refinadas. As técnicas de refinamento utilizadas nas análises numéricas são as seguintes: para o MEF adotou-se o refino h ; para a AIG baseada no uso das NURBS, o refino denominado de inserção de nós; para a AIG baseada no uso das T-splines, o refino local proporcionado pelo algoritmo presente no *software* Rhino, o qual se assemelha ao refino de inserção de nós.

Para todos os métodos empregados, utilizou-se a integração numérica de Gauss. Sendo todas as funções bicúbicas, adotou-se o número de quatro pontos de integração para cada uma das direções paramétricas dos domínios de integração.

Na sequência são apresentados os problemas escolhidos para o estudo das aplicações numéricas, os quais seguem a seguinte denominação e ordem de apresentação:

- Chapa quadrada;
- Viga circular;
- Chapa com furo circular;
- Chapa em L;
- Barragem.

5.1 CHAPA QUADRADA

Na FIGURA 42 pode ser visto a configuração do problema de uma chapa quadrada tracionada no extremo esquerdo e engastada no extremo direito. Essa chapa quadrada possui lados $L = 100$. Os parâmetros de elasticidade empregados são: módulo de elasticidade $E = 1$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. A tração imposta é $T_x = 1$. O problema é analisado sob as condições do estado plano de tensões. Para este problema estimou-se a energia de deformação através do uso do MEF com elementos de Lagrange de 16 nós, para tanto, utilizou-se uma malha refinada com 18.818 graus de liberdade e 1.024 elementos, sendo obtida a energia de deformação $U = 4.938,92372179$.

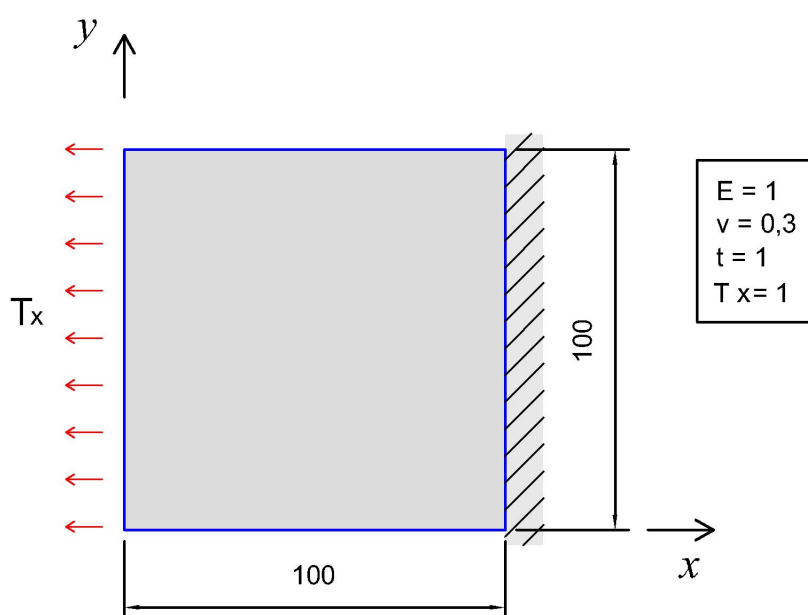


FIGURA 42 – PROBLEMA DE UMA CHAPA QUADRADA TRACIONADA NO LADO ESQUERDO E ENGASTADA NO LADO DIREITO.

FONTE: O autor (2017).

Esse problema foi escolhido para se aferir a aplicação das três formas da AIG (NURBS clássica, NURBS com extração de Bézier e T-splines com extração de Bézier), as quais são utilizadas nesse e nos demais problemas que se seguem. Foram aplicadas as seguintes análises: MEF-Q16-REF.1:1, AIG-NURBS-G3-CLÁSSICA-REF.1:1, AIGB-NURBS-G3-REF.1:1, AIGB-TSPLINE-1. As malhas utilizadas para essas análises podem ser vistas nas FIGURAS 43-45.

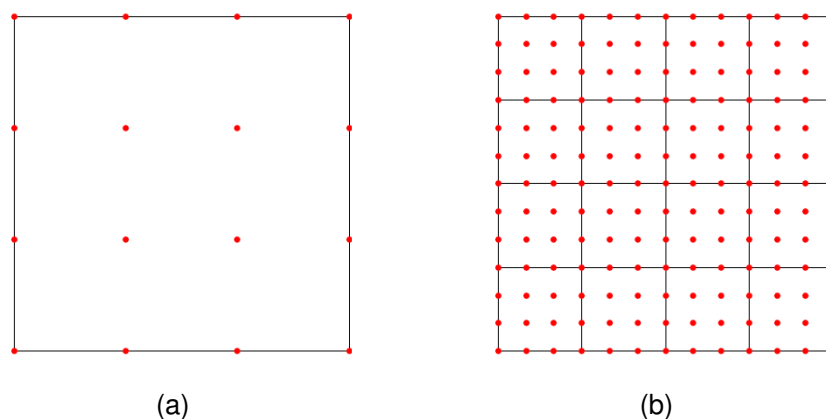


FIGURA 43 – MALHA FÍSICA E NÓS DOS ELEMENTOS REFERENTES À FEM-Q16-REF.1:1. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.

FONTE: O autor (2017).

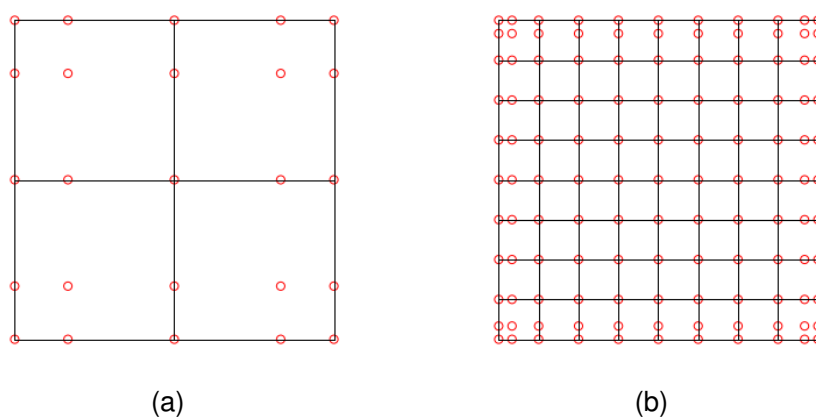


FIGURA 44 – MALHA FÍSICA E PONTOS DE CONTROLE (CÍRCULOS) REFERENTES À AIG-NURBS-G3-CLÁSSICA-REF.1:1 E À AIGB-NURBS-G3-REF.1:1. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.

FONTE: O autor (2017).

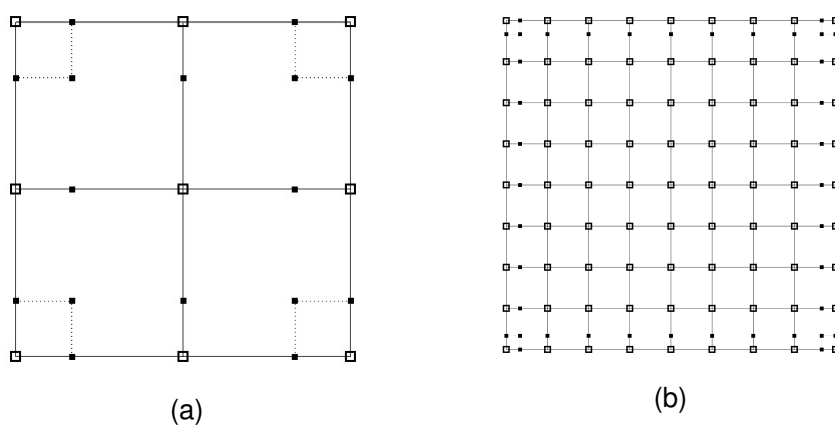


FIGURA 45 – T-MALHA NO ESPAÇO FÍSICO E PONTOS DE CONTROLE (QUADRADOS) REFERENTES À AIGB-TSPLINE-1, EXTRAÍDOS DO *SOFTWARE* RHINO. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.

FONTE: O autor (2017).

Para a análise da convergência das soluções, utilizou-se o cálculo da energia de deformação (FIGURA 46) e o erro relativo na energia de deformação (FIGURA 47). Como pode ser observado nas FIGURA 46 e 47, os resultados obtidos para as três formas da AIG são os mesmos, isto significa que, utilizando-se a forma clássica da AIG ou a AIG com a extração de Bézier, obtém-se os mesmos resultados. Além disso, aplicou-se a AIG baseada nas T-splines com uma T-malha sem T-junções e para a qual também foram obtidos os mesmos resultados, o que já era esperado, pois as T-splines são uma generalização das NURBS e para o caso de uma T-malha sem T-junções o resultado deve ser idêntico. Outro ponto a ser observado na FIGURA 47 é que as análises relacionadas a AIG apresentaram erros menores que o MEF com elementos de Lagrange.

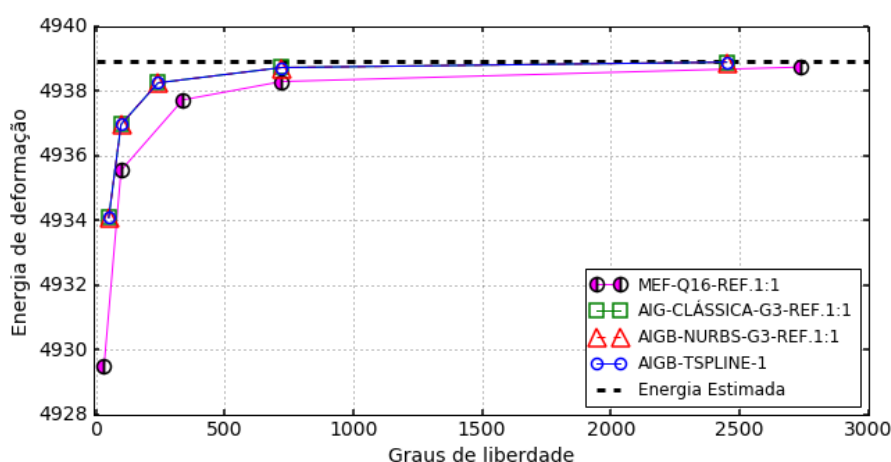


FIGURA 46 – ENERGIA DE DEFORMAÇÃO *VERSUS* NÚMERO TOTAL DE GRAUS DE LIBERDADE PARA O PROBLEMA DA CHAPA QUADRADA.

FONTE: O autor (2017).

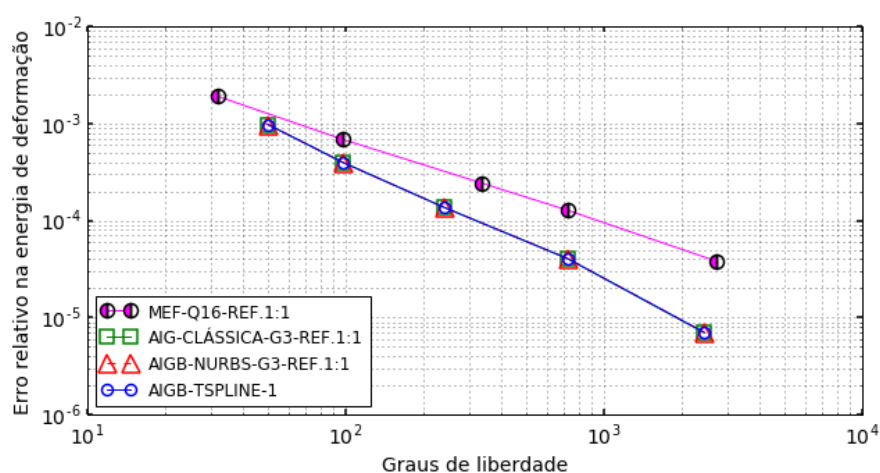


FIGURA 47 – ERRO RELATIVO NA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO *VERSUS* NÚMERO TOTAL DE GRAUS DE LIBERDADE PARA O PROBLEMA DA CHAPA QUADRADA.

FONTE: O autor (2017).

Na TABELA 4 estão resumidos os valores do erro relativo na energia de deformação e os graus de liberdade usados em cada análise.

TABELA 4 – VALORES DO ERRO RELATIVO NA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO DIFERENTES GDL'S PARA AS ANÁLISES AIG-CLÁSSICA-G3-REF. 1:1, AIGB-NURBS-G3-REF. 1:1, AIGB-TSPLINE-1 E FEM-Q16-REF.1:1 DO PROBLEMA DA CHAPA QUADRADA.

AIG-CLÁSSICA-G3-REF. 1:1 / AIGB-NURBS-G3-REF. 1:1 / AIGB-TSPLINE-1			FEM-Q16- REF. 1:1		
GDL	$(e_U)_{rel}$	$(e_U)_{rel}(\%)$	GDL	$(e_U)_{rel}$	$(e_U)_{rel}(\%)$
50	9,81115110e-04	0,10%	32	1,90849714e-03	0,19%
98	3,96377349e-04	0,04%	98	6,84434905e-04	0,07%
242	1,36197728e-04	0,01%	338	2,43083687e-04	0,02%
722	4,06662264e-05	0,00%	722	1,28180111e-04	0,01%
2450	6,96044157e-06	0,00%	2738	3,81119047e-05	0,00%

FONTE: O autor (2017).

Na FIGURA 48 podem ser conferidas as distribuições das tensões obtidas através da AIGB-TSPLINE-1, correspondentes à malha da FIGURA 45b. Na FIGURA 49, têm-se os deslocamentos obtidos na direção x e na direção y para essa malha.

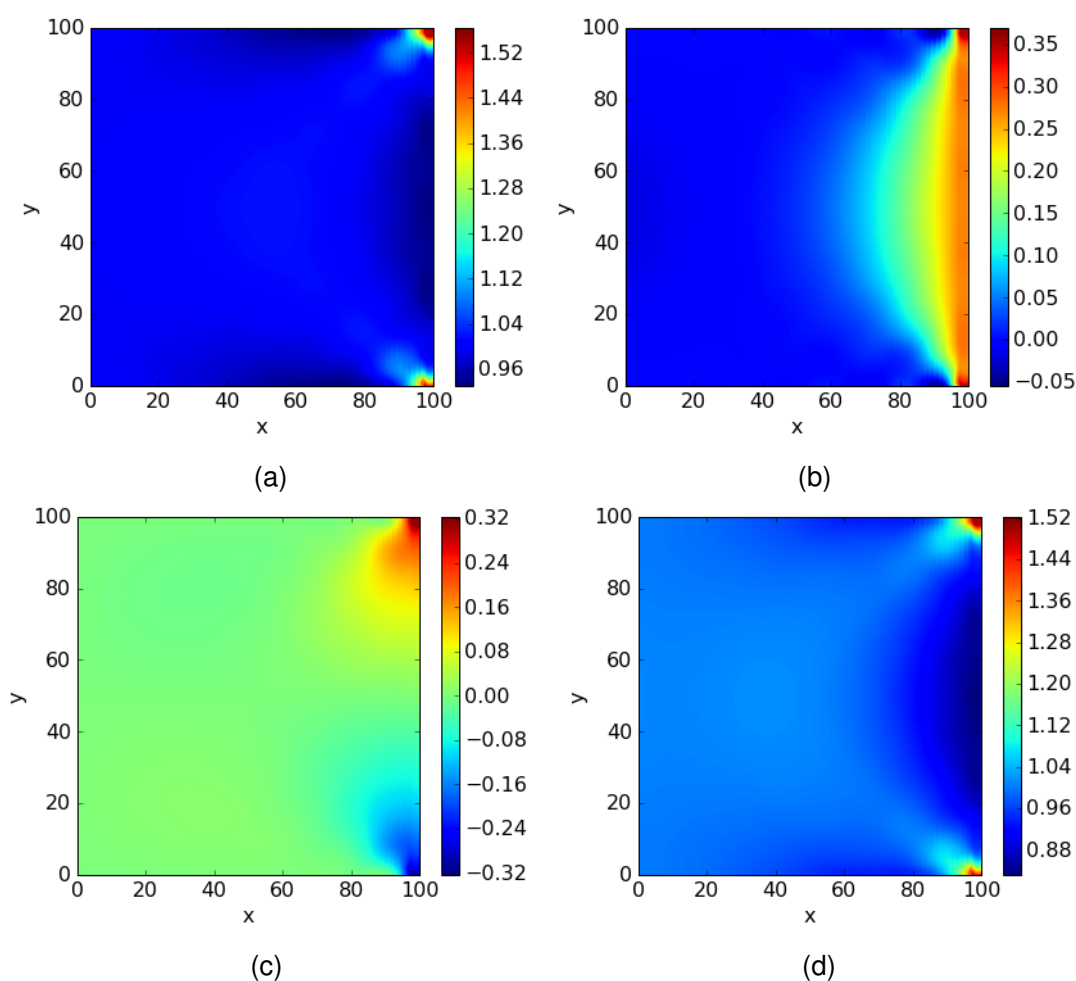


FIGURA 48 – TENSÕES NA CHAPA QUADRADA. a) σ_x . b) σ_y . c) τ_{xy} . d) VON MISES.

FONTE: O autor (2017).

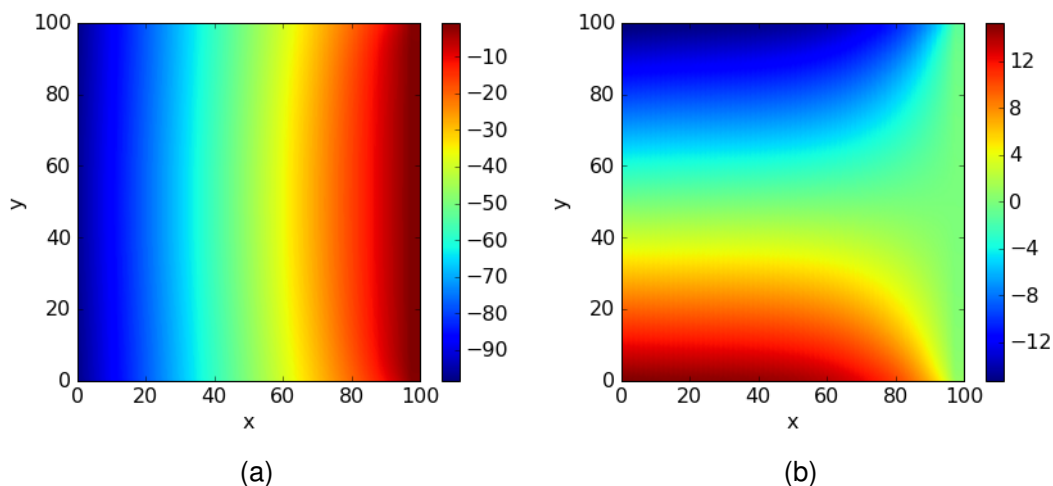


FIGURA 49 – DESLOCAMENTOS NA CHAPA QUADRADA. a) DIREÇÃO X. b) DIREÇÃO Y.
FONTE: O autor (2017).

5.2 VIGA CIRCULAR

Na FIGURA 50 pode ser visto a configuração do problema de uma viga circular com deslocamento prescrito em um dos extremos. A curvatura da viga possui raio interno $R_{int} = 5$, raio externo $R_{ext} = 10$ e espessura $t = 1$. Os parâmetros de elasticidade empregados são: módulo de elasticidade $E = 10.000$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$. O deslocamento prescrito é $u_0 = 0,01$. O problema é analisado sob a condição de estado plano de tensões. A solução analítica é dada em Timoshenko e Goodier (1986) e a energia de deformação exata calculada para este problema é $U = 0,0148248342$, sendo esse valor metade do valor apresentado em Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2013).

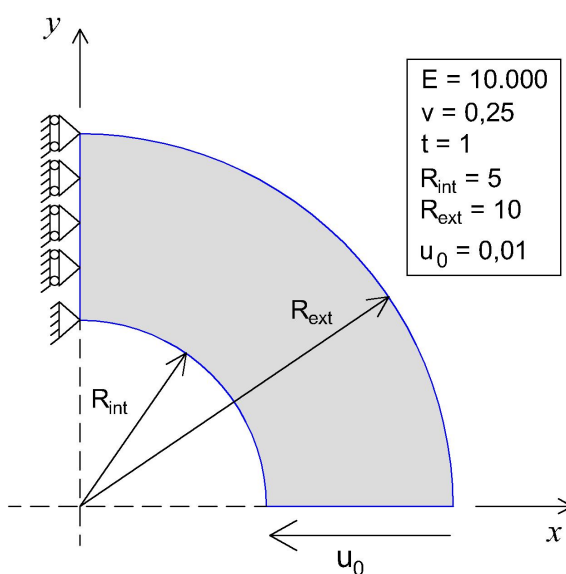


FIGURA 50 – PROBLEMA DE UMA VIGA CIRCULAR COM DESLOCAMENTO PRESCRITO.
FONTE: Adaptado de NGUYEN (2011).

Esse problema foi escolhido para uma segunda aferição da AIG baseada nas T-splines, tendo como base os estudos realizados por Nguyen (2011). Primeiramente, foram realizadas as mesmas análises presentes no trabalho citado. Os resultados em termos do erro relativo na energia de deformação estão plotados na FIGURA 51 e como pode ser observado, obteve-se uma boa concordância entre os resultados obtidos pelo autor (denominados de VERIFICAÇÃO) e os apresentados em Nguyen (2011), porém, notam-se pequenos desvios em relação as malhas mais finas para os casos da AIG baseada no uso das T-splines. Entretanto, acredita-se que esses desvios podem ser justificados pelo fato das malhas terem sido reconstruídas pelo autor, de maneira mais semelhante possível às aquelas encontradas no referido trabalho, e também pela ordem de grandeza atingida nos erros obtidos.

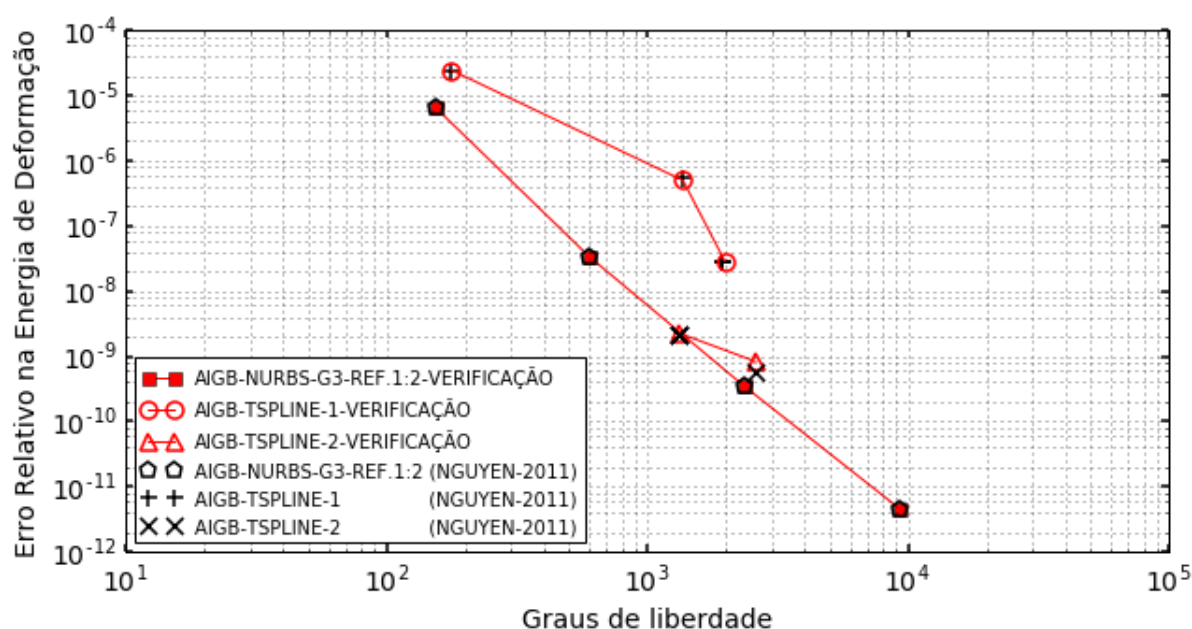


FIGURA 51 – ERRO RELATIVO NA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO *VERSUS* NÚMERO TOTAL DE GRAUS DE LIBERDADE PARA O PROBLEMA DA VIGA CIRCULAR.

FONTE: O autor (2017).

Os resultados apresentados por Nguyen (2011) e aqui averiguados pelo autor (AIG-NURBS-G3-REF.1:2-VERIFICAÇÃO¹, AIG-TSPLINE-1-VERIFICAÇÃO¹, AIG-TSPLINE-2-VERIFICAÇÃO¹) mostram que para esse tipo de problema não foram obtidos resultados significativos quando utilizadas as T-splines. Todavia, outras análises com diferentes malhas foram realizadas pelo autor para uma melhor compreensão da aplicação das T-splines. Foram feitas as seguintes análises: MEF-Q16-REF.1:1, MEF-Q16-REF.1:2, AIGB-NURBS-G3-REF.1:1, AIGB-NURBS-G3-REF.1:2, AIGB-NURBS-G3-REF.NU, AIGB-TSPLINE-1 e

¹As malhas utilizadas para a verificação dos resultados de Nguyen (2011), apresentadas na FIGURA 51, apesar de possuírem as mesmas nomenclaturas, não são as mesmas que as apresentadas nas FIGURAS 52-58.

AIGB-TSPLINE-2. As malhas utilizadas nessas aplicações podem ser vistas nas FIGURAS 52-58.

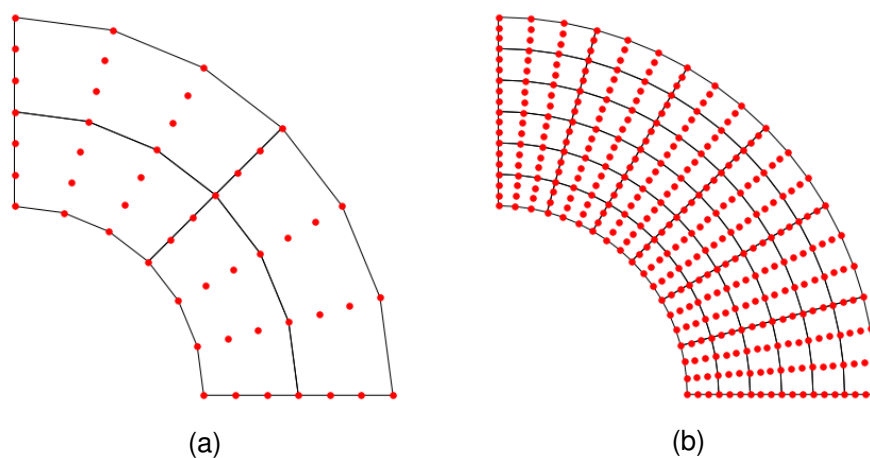


FIGURA 52 – MALHA FÍSICA E NÓS DOS ELEMENTOS REFERENTES À FEM-Q16-REF.1:1. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.

FONTE: O autor (2017).

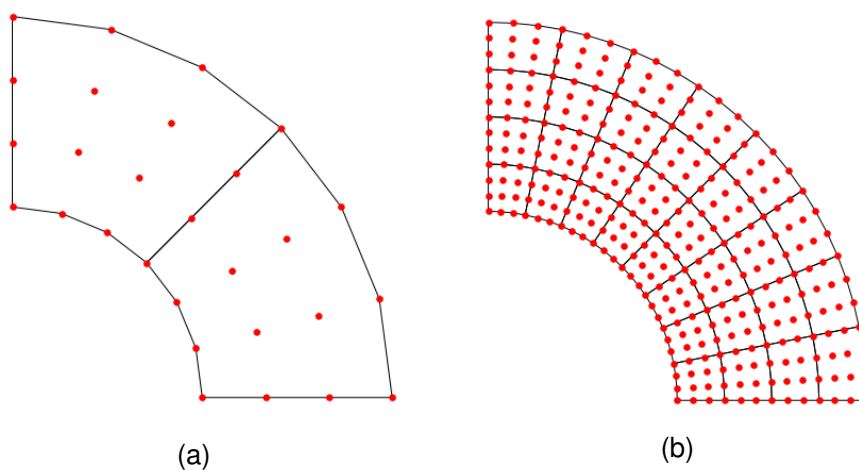


FIGURA 53 – MALHA FÍSICA E NÓS DOS ELEMENTOS REFERENTES À FEM-Q16-REF.1:2. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.

FONTE: O autor (2017).

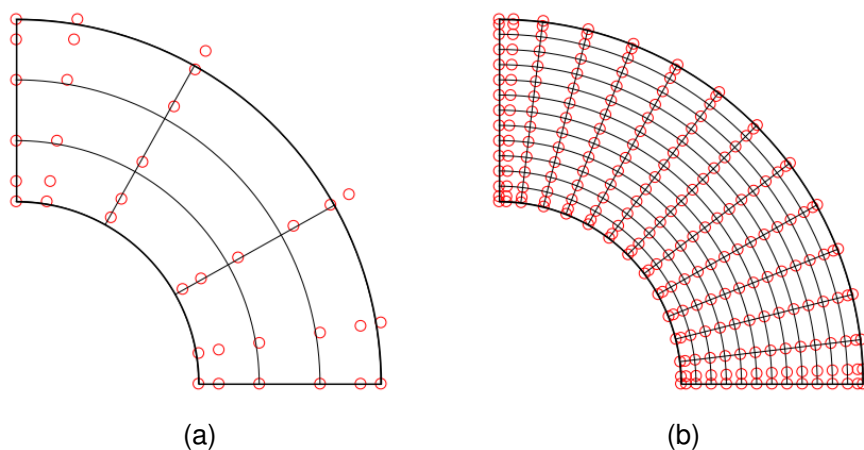


FIGURA 54 – MALHA FÍSICA E PONTOS DE CONTROLE (CÍRCULOS) REFERENTES À AIG-NURBS-G3-REF.1:1. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.
FONTE: O autor (2017).

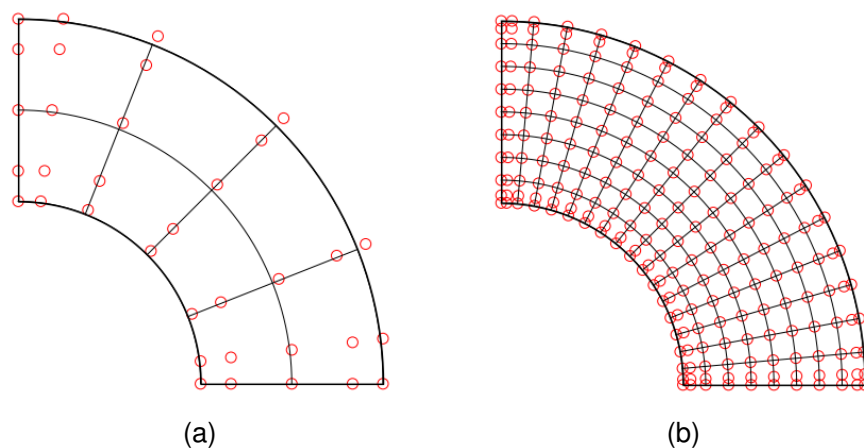


FIGURA 55 – MALHA FÍSICA E PONTOS DE CONTROLE (CÍRCULOS) REFERENTES À AIG-NURBS-G3-REF.1:2. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.
FONTE: O autor (2017).

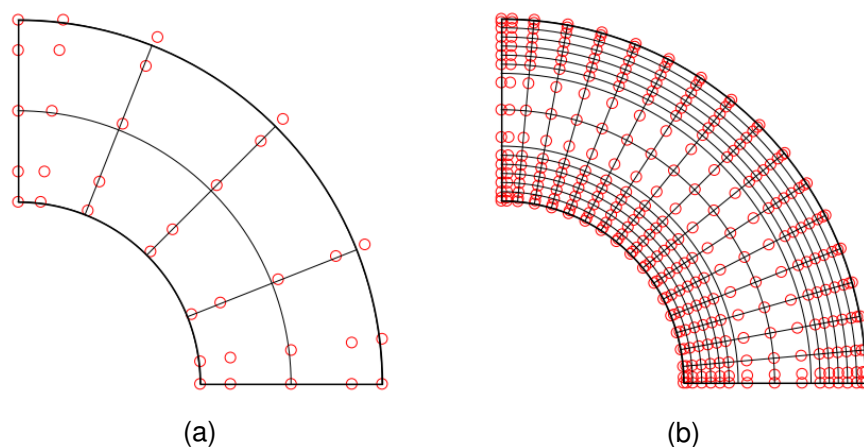


FIGURA 56 – MALHA FÍSICA E PONTOS DE CONTROLE (CÍRCULOS) REFERENTES À AIG-NURBS-G3-REF.NU. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.
FONTE: O autor (2017).

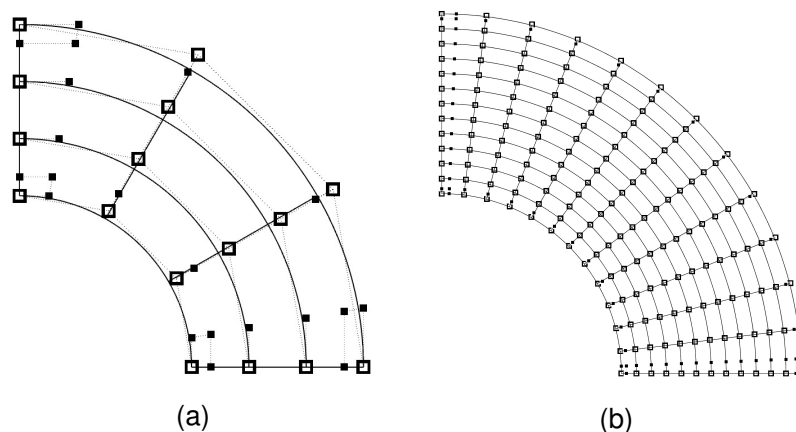


FIGURA 57 – T-MALHA NO ESPAÇO FÍSICO E PONTOS DE CONTROLE (QUADRADOS) REFERENTES À AIGB-TSPLINE-1, EXTRAÍDOS DO *SOFTWARE* RHINO. a) MALHA INICIAL. b) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.

FONTE: O autor (2017).

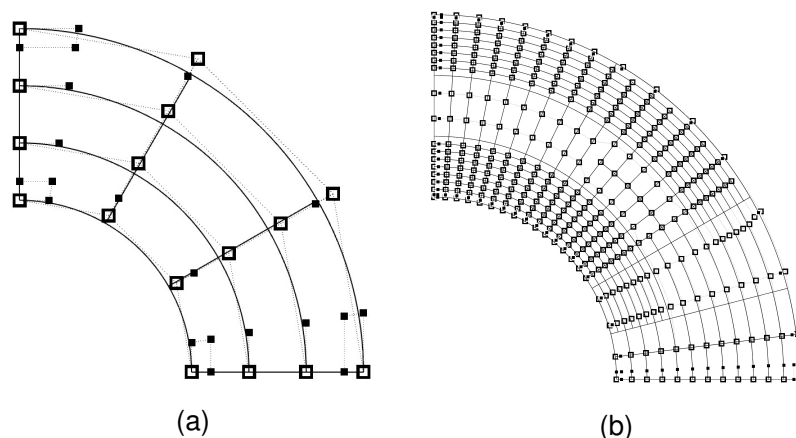


FIGURA 58 – T-MALHA NO ESPAÇO FÍSICO E PONTOS DE CONTROLE (QUADRADOS) REFERENTES À AIGB-TSPLINE-2, EXTRAÍDOS DO *SOFTWARE* RHINO. a) MALHA INICIAL. b) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.

FONTE: O autor (2017).

Na FIGURAS 59a e 60a, observam-se as T-malhas representadas no espaço físico, extraídas do *software* Rhino, após o 4º refinamento e o 3º refinamento, respectivamente, e nas FIGURAS 59b e 60b essas mesmas T-malhas estendidas, na quais podem ser vistos os T-elementos/Elementos de Bézier. As T-malhas foram refinadas de acordo com a distribuição de tensões de Von Mises e também foram refinadas na região de aplicação do deslocamento prescrito.

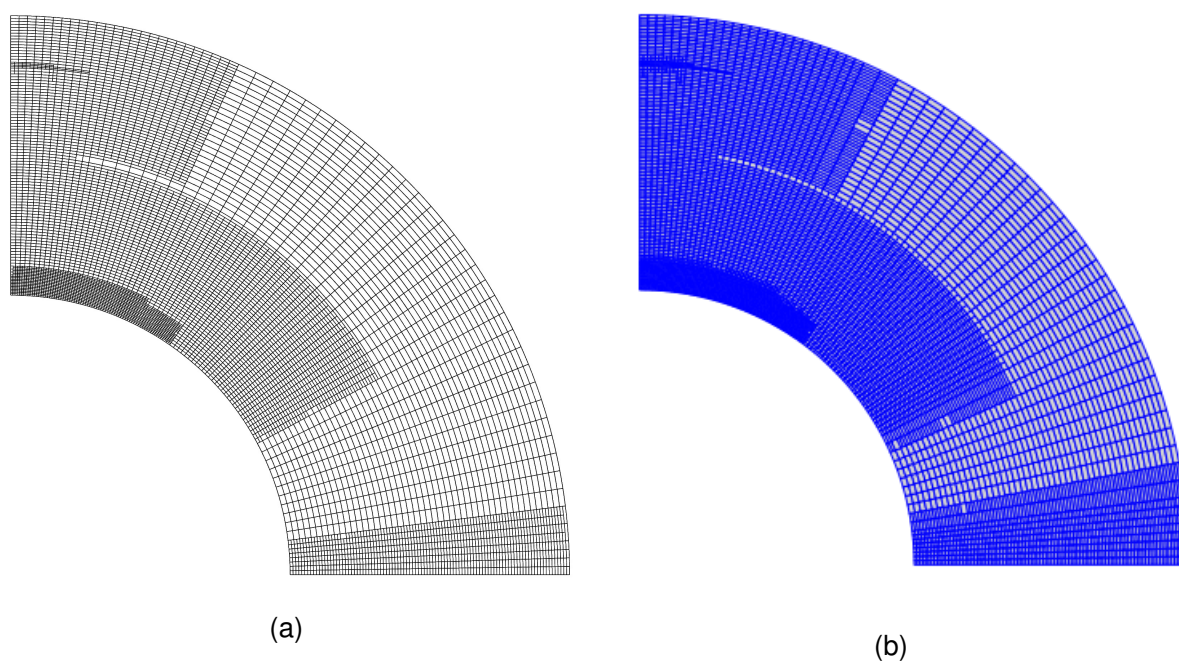


FIGURA 59 – a) T-MALHA APÓS O 4º REFINAMENTO, EXTRAÍDA DO *SOFTWARE* RHINO, REFERENTE À AIGB-TSPLINE-1. b) T-ELEMENTOS/ELEMENTOS DE BÉZIER CORRESPONDENTES À T-MALHA APRESENTADA EM a).

FONTE: O autor (2017).

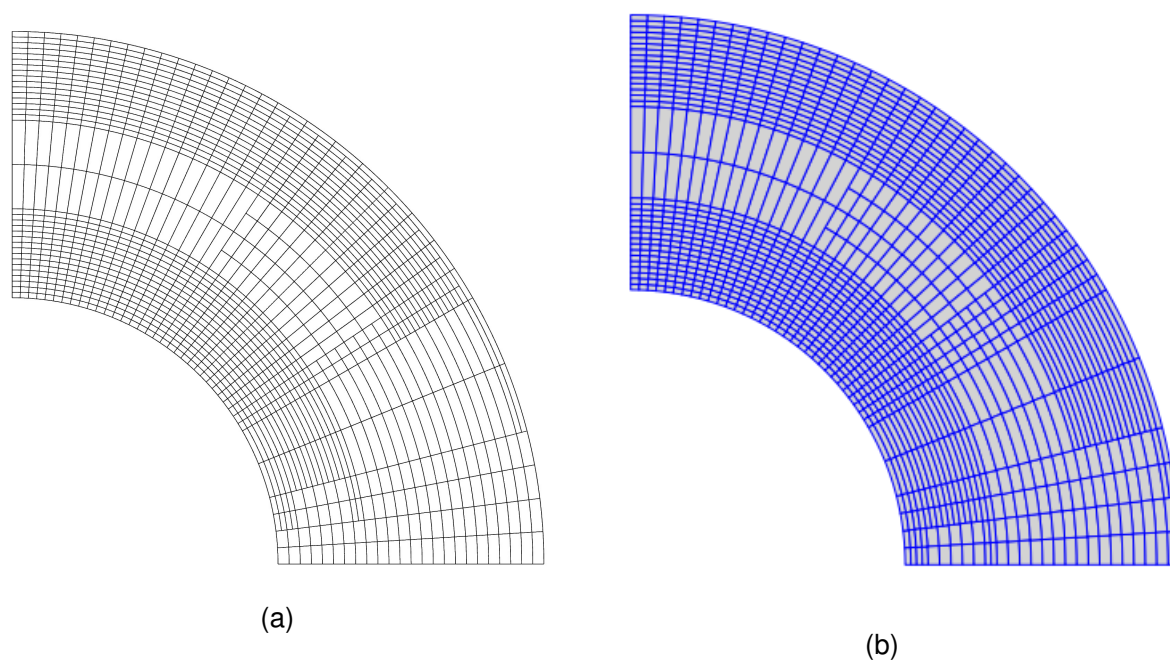


FIGURA 60 – a) T-MALHA APÓS O 3º REFINAMENTO, EXTRAÍDA DO *SOFTWARE* RHINO, REFERENTE À AIGB-TSPLINE-2. b) T-ELEMENTOS/ELEMENTOS DE BÉZIER CORRESPONDENTES À T-MALHA APRESENTADA EM a).

FONTE: O autor (2017).

Na FIGURA 61 e nas TABELAS 5-8, observam-se as convergências das soluções numéricas. Primeiramente, nota-se muita pouca diferença entre os resultados referentes às

malhas de proporção 1:1 e 1:2, tanto para a AIG baseada em NURBS (AIGB-NURBS-G3-REF.1:1 e AIGB-NURBS-G3-REF.1:2) quanto para o MEF (MEF-Q16-REF.1:1 e MEF-Q16-REF.1:2). Nas análises com malhas não uniformes, percebe-se que não foram obtidas boas convergências para a AIG baseada em NURBS (AIGB-NURBS-G3-REF.NU), pois houve um afastamento das soluções em relação as malhas uniformes. Para a AIG baseada nas T-splines (AIGB-TSPLINE-1 e AIGB-TSPLINE-2), conclui-se que quaisquer inclusões de T-junções nas malhas conduzem a piores taxas de convergências, isso fica bem nítido com a AIGB-TSPLINE-1, pois nessa tentativa, após quatro refinos uniformes, realizou-se um último refino com adição de T-junções e para este resultado, observa-se um desvio na taxa de convergência. Essas observações corroboram com aquelas apresentadas em Nguyen (2011).

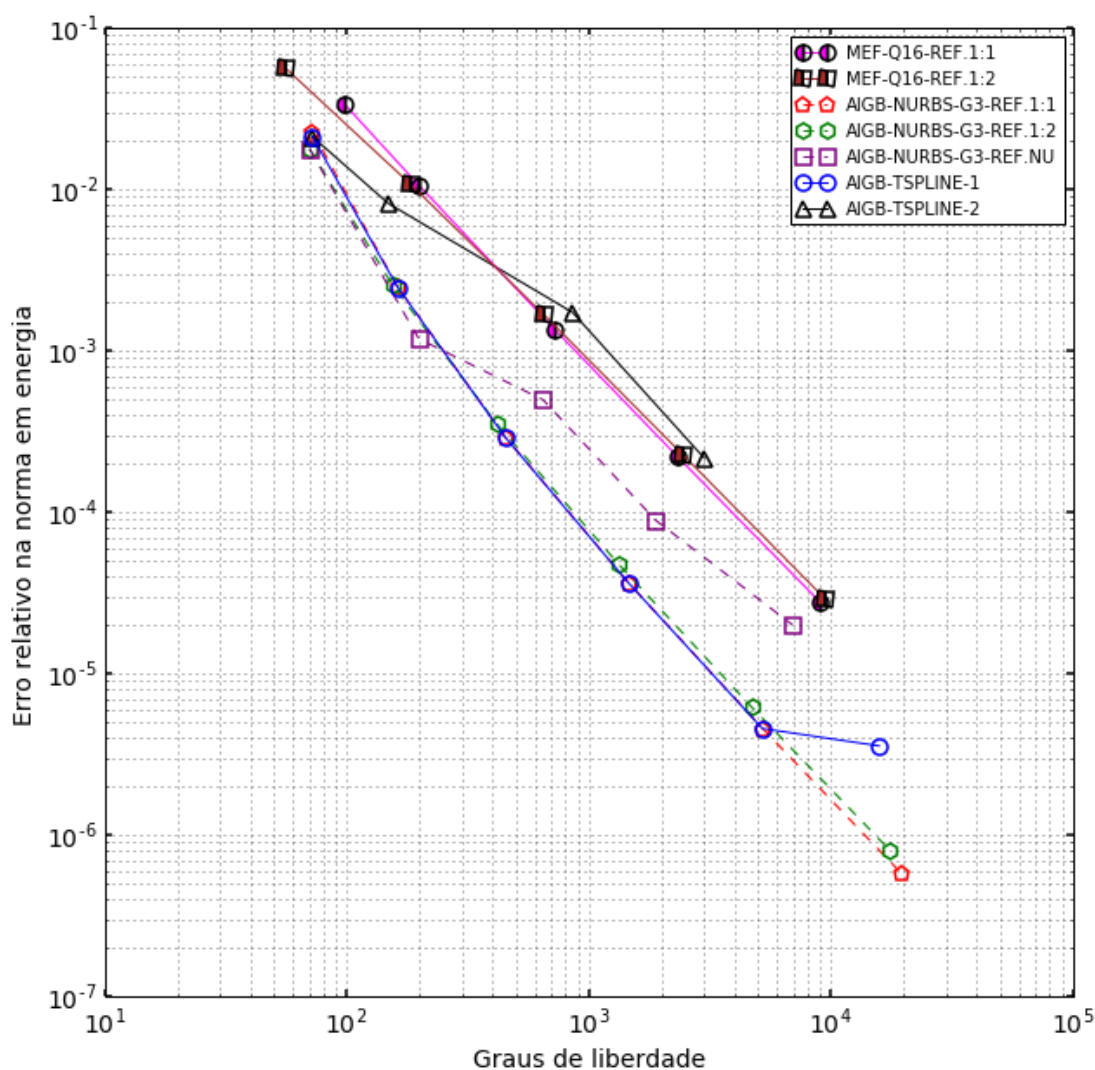


FIGURA 61 – ERRO RELATIVO NA NORMA EM ENERGIA *VERSUS* NÚMERO TOTAL DE GRAUS DE LIBERDADE PARA O PROBLEMA DA VIGA CIRCULAR.

FONTE: O autor (2017).

TABELA 5 – VALORES DO ERRO RELATIVO NA NORMA EM ENERGIA CONSIDERANDO DIFERENTES GDL'S PARA AS ANÁLISES FEM-Q16-REF.1:1 E FEM-Q16-REF.1:2 DO PROBLEMA DA VIGA CIRCULAR.

FEM-Q16 REF. 1:1			FEM-Q16 REF. 1:2		
GDL	$(e_E)_{rel}$	$(e_E)_{rel}$	GDL	$(e_E)_{rel}$	$(e_E)_{rel}(\%)$
98	3,35650382e-02	3,36%	56	5,61545774e-02	5,62%
200	1,04609865e-02	1,05%	182	1,08738337e-02	1,09%
722	1,35615691e-03	0,14%	650	1,68109319e-03	0,17%
2312	2,22428979e-04	0,02%	2450	2,26092086e-04	0,02%
8978	2,79231829e-05	0,00%	9506	2,88502924e-05	0,00%

TABELA 6 – VALORES DO ERRO RELATIVO NA NORMA EM ENERGIA CONSIDERANDO DIFERENTES GDL'S PARA AS ANÁLISES AIGB-NURBS-G3-REF.1:1 E AIGB-NURBS-G3-REF.1:2 DO PROBLEMA DA VIGA CIRCULAR.

AIGB-NURBS-G3 REF. 1:1			AIGB-NURBS-G3 REF. 1:2		
GDL	$(e_E)_{rel}$	$(e_E)_{rel}(\%)$	GDL	$(e_E)_{rel}$	$(e_E)_{rel}(\%)$
72	2,28940350e-02	2,29%	70	1,78803726e-02	1,79%
162	2,49198556e-03	0,25%	154	2,56359615e-03	0,26%
450	2,93895024e-04	0,03%	418	3,50842789e-04	0,04%
1458	3,65842393e-05	0,00%	1330	4,74365512e-05	0,00%
5202	4,59287099e-06	0,00%	4690	6,23624349e-06	0,00%
19602	5,76250009e-07	0,00%	17554	8,01217380e-07	0,00%

TABELA 7 – VALORES DO ERRO RELATIVO NA NORMA EM ENERGIA CONSIDERANDO DIFERENTES GDL'S PARA A ANÁLISE AIGB-NURBS-G3-REF.NU DO PROBLEMA DA VIGA CIRCULAR.

AIGB-NURBS-G3 REF. NU		
GDL	$(e_E)_{rel}$	$(e_E)_{rel}(\%)$
70	1,78803726e-02	1,79%
198	1,18843094e-03	0,12%
646	4,97464625e-04	0,05%
1890	8,90624687e-05	0,01%
6936	2,00450910e-05	0,00%

TABELA 8 – VALORES DO ERRO RELATIVO NA NORMA EM ENERGIA CONSIDERANDO DIFERENTES GDL'S PARA AS ANÁLISES AIGB-TSPLINE-1 E AIGB-TSPLINE-2 DO PROBLEMA DA VIGA CIRCULAR.

AIGB-TSPLINE-1			AIGB-TSPLINE-2		
GDL	$(e_E)_{rel}$	$(e_E)_{rel}(\%)$	GDL	$(e_E)_{rel}$	$(e_E)_{rel}(\%)$
72	2,12314645e-02	2,12%	72	2,12314645e-02	2,12%
162	2,47452997e-03	0,25%	148	8,20959154e-03	0,82%
450	2,92713568e-04	0,03%	854	1,73460371e-03	0,17%
1458	3,64441374e-05	0,00%	2994	2,16569527e-04	0,02%
5202	4,57461077e-06	0,00%	—	—	—
15804	3,57116219e-06	0,00%			

Na FIGURA 62 podem ser conferidas as distribuições das tensões obtidas através da AIGB-TSPLINE-1, correspondentes à malha da FIGURA 59a. Na FIGURA 63, têm-se os deslocamentos obtidos na direção x e na direção y para essa malha.

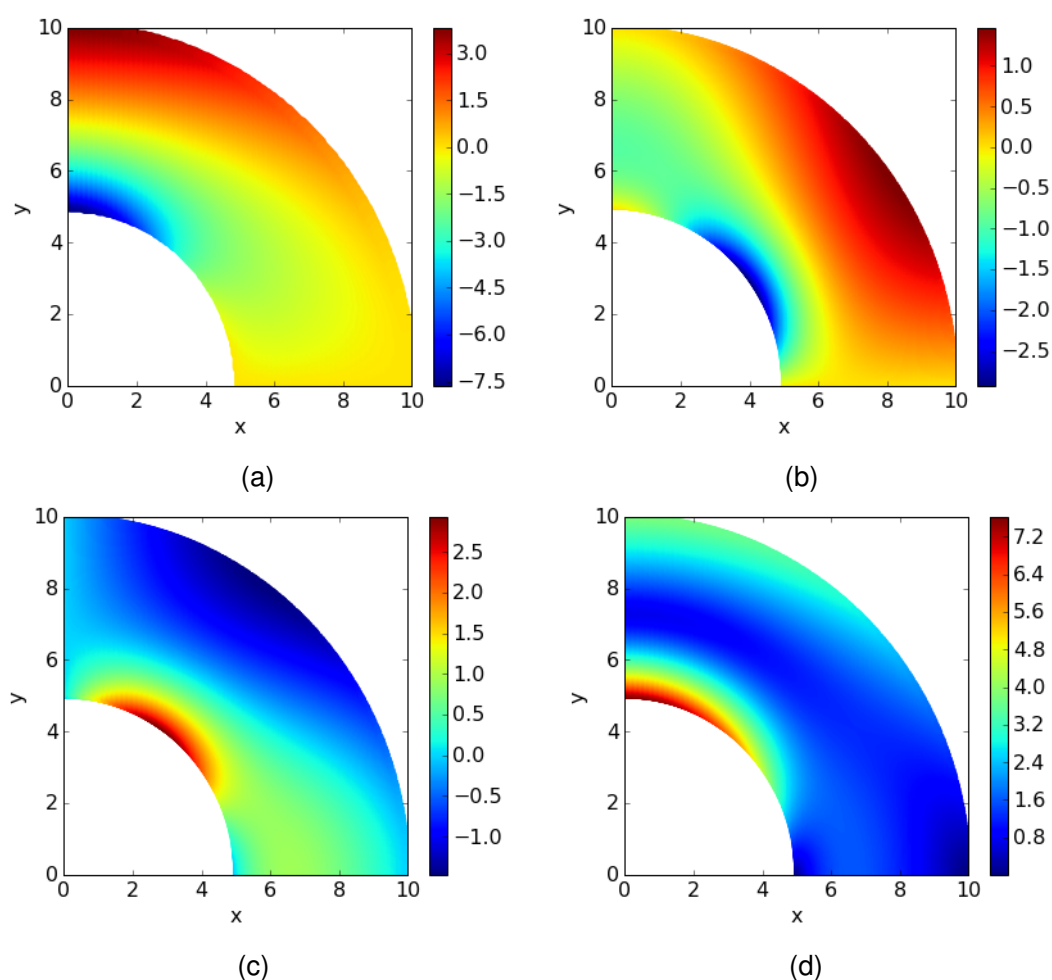


FIGURA 62 – TENSÕES NA VIGA CIRCULAR CORRESPONDENTES. a) σ_x . b) σ_y . c) τ_{xy} . d) VON MISES. FONTE: O autor (2017).

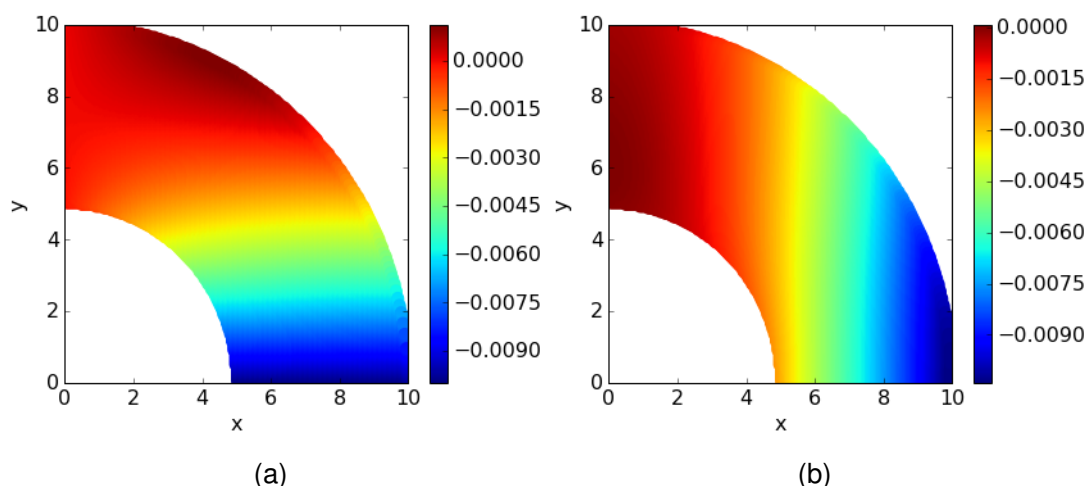


FIGURA 63 – DESLOCAMENTOS NA VIGA CIRCULAR. a) DIREÇÃO X. b) DIREÇÃO Y.
FONTE: O autor (2017).

5.3 CHAPA COM FURO CIRCULAR

Na FIGURA 64 pode ser visto a configuração do problema de uma chapa com furo circular tracionada nos extremos. Na FIGURA 64b, observa-se um quarto de um disco que representa uma pequena região da chapa apresentada na FIGURA 64a. Utiliza-se apenas um quarto devido a simetria do problema. Esse disco possui raio interno $R_{int} = 1$, raio externo $R_{ext} = 4$ e espessura $t = 1$. Os parâmetros de elasticidade empregados são: módulo de elasticidade $E = 1.000$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. A tração imposta é $T_x = 1$. O problema é analisado sob as condições do estado plano de tensões. A solução analítica é dada em Timoshenko e Goodier (1986) e a energia de deformação exata calculada para a configuração desse problema é $U = 0,00658473$. Esse problema foi adaptado do trabalho de Nguyen (2011). Uma outra maneira de se resolver esse problema pode ser visto no APÊNDICE B.

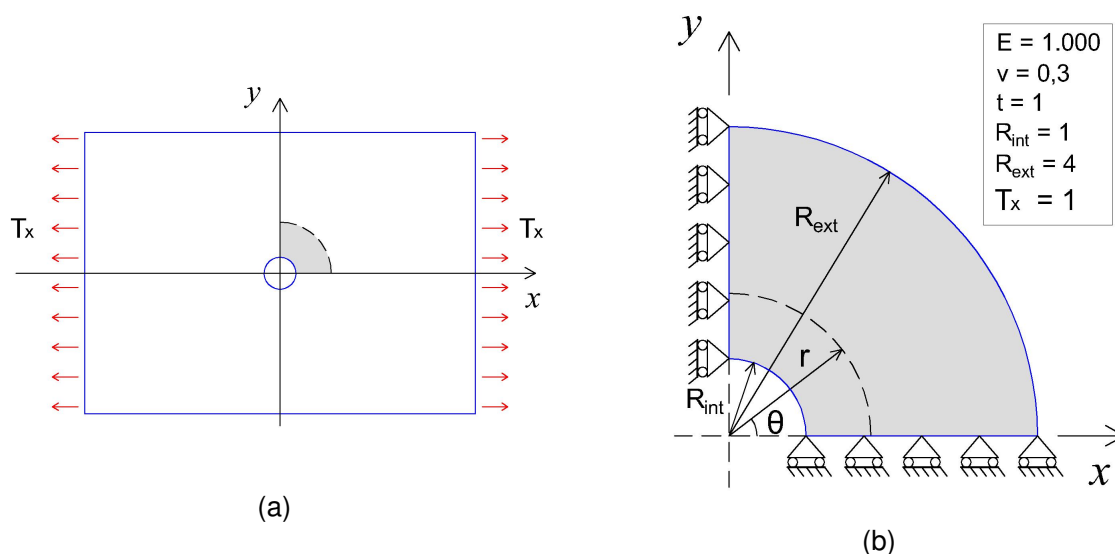


FIGURA 64 – a) CHAPA COM FURO CIRCULAR SOB TRAÇÃO. b) REGIÃO REPRESENTATIVA DO PROBLEMA.

FONTE: Adaptado de NGUYEN (2011).

Para esse problema foram realizadas as seguintes análises: MEF-Q16-REF.1:1, MEF-Q16-REF.1:2, AIGB-NURBS-G3-REF.1:1, AIGB-NURBS-G3-REF.1:2, AIGB-NURBS-G3-REF.NU, AIGB-TSPLINE-1, AIGB-TSPLINE-2. As malhas utilizadas para essas análises podem ser vistas nas FIGURAS 65-71. Nas FIGURAS 72a e 73a podem ser observadas as T-malhas representadas no espaço físico, extraídas do *software* Rhino, utilizadas nas análises relativas às T-splines e nas FIGURAS 72b e 73b podem ser observados os T-elementos/Elementos de Bézier utilizados para fins de integração numérica. As T-malhas foram refinadas de acordo com a distribuição de tensões de Von Mises e o refino se concentrou nas regiões que apresentaram uma maior concentração de tensões.

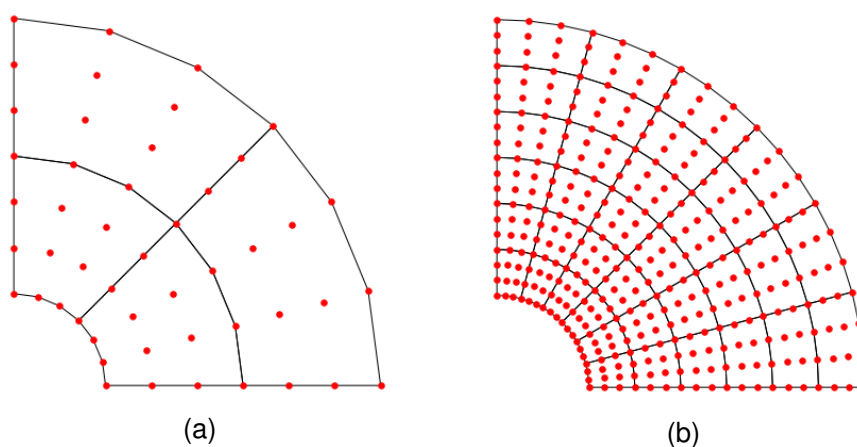


FIGURA 65 – MALHA FÍSICA E NÓS DOS ELEMENTOS REFERENTES À FEM-Q16-REF.1:1. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.

FONTE: O autor (2017).

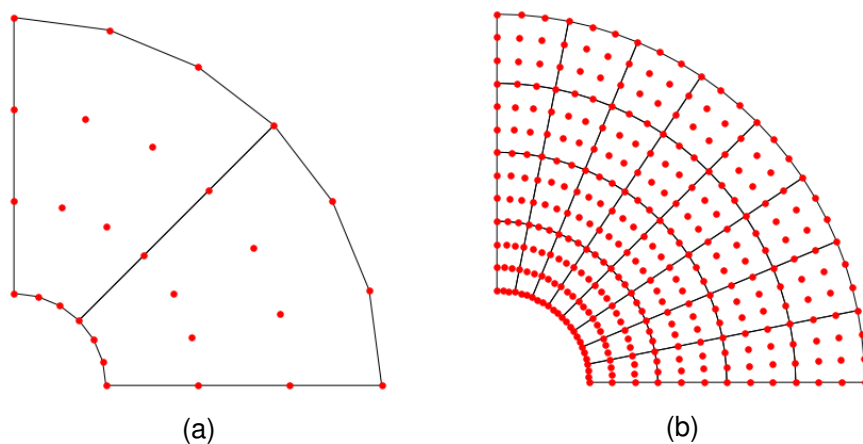


FIGURA 66 – MALHA FÍSICA E NÓS DOS ELEMENTOS REFERENTES À FEM-Q16-REF.1:2. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.

FONTE: O autor (2017).

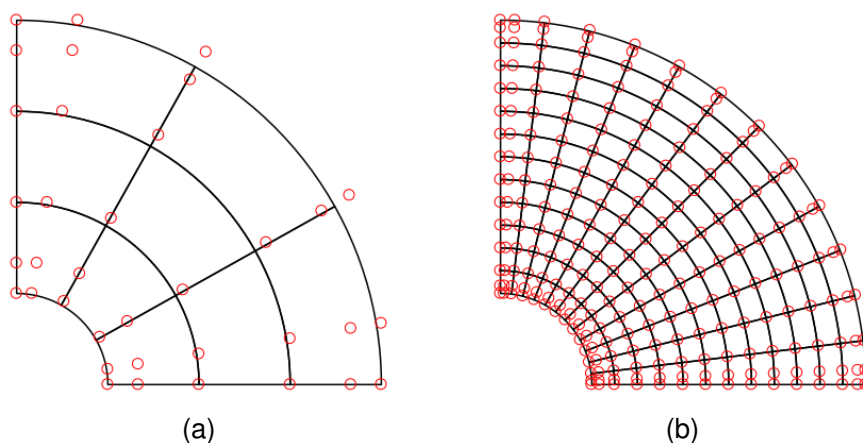


FIGURA 67 – MALHA FÍSICA E PONTOS DE CONTROLE (CÍRCULOS) REFERENTES À AIG-NURBS-G3-REF.1:1. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.

FONTE: O autor (2017).

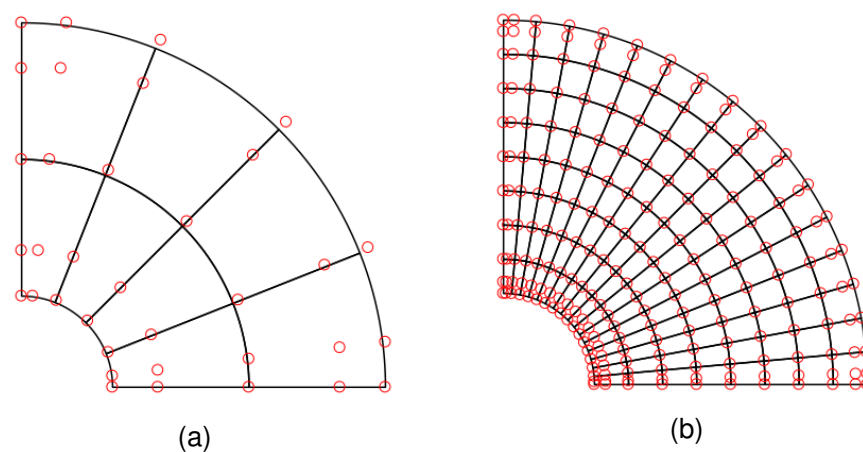


FIGURA 68 – MALHA FÍSICA E PONTOS DE CONTROLE (CÍRCULOS) REFERENTES À AIG-NURBS-G3-REF.1:2. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.

FONTE: O autor (2017).

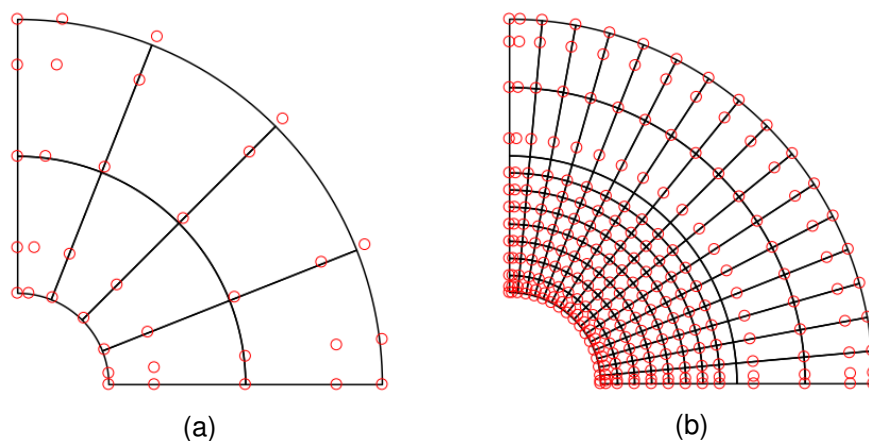


FIGURA 69 – MALHA FÍSICA E PONTOS DE CONTROLE (CÍRCULOS) REFERENTES À AIG-NURBS-G3-REF.NU. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.

FONTE: O autor (2017).

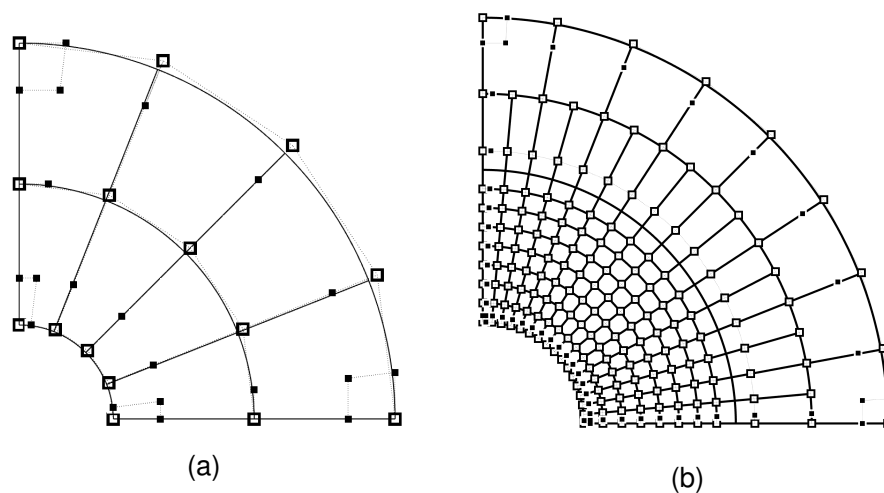


FIGURA 70 – T-MALHA NO ESPAÇO FÍSICO E PONTOS DE CONTROLE (QUADRADOS) REFERENTES À AIGB-TSPLINE-1, EXTRAÍDOS DO SOFTWARE RHINO. a) MALHA INICIAL. b) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.

FONTE: O autor (2017).

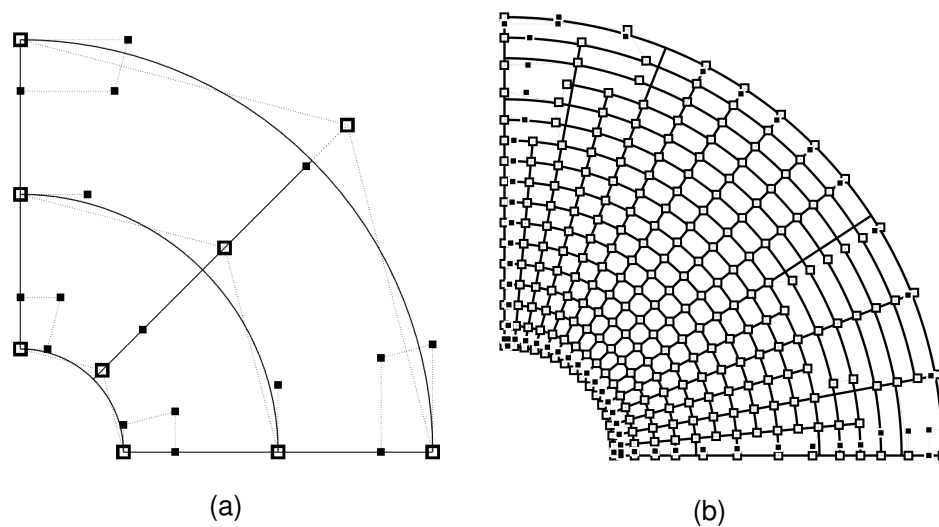


FIGURA 71 – T-MALHA NO ESPAÇO FÍSICO E PONTOS DE CONTROLE (QUADRADOS) REFERENTES À AIGB-TSPLINE-2, EXTRAÍDOS DO *SOFTWARE* RHINO.. a) MALHA INICIAL. b) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.

FONTE: O autor (2017).

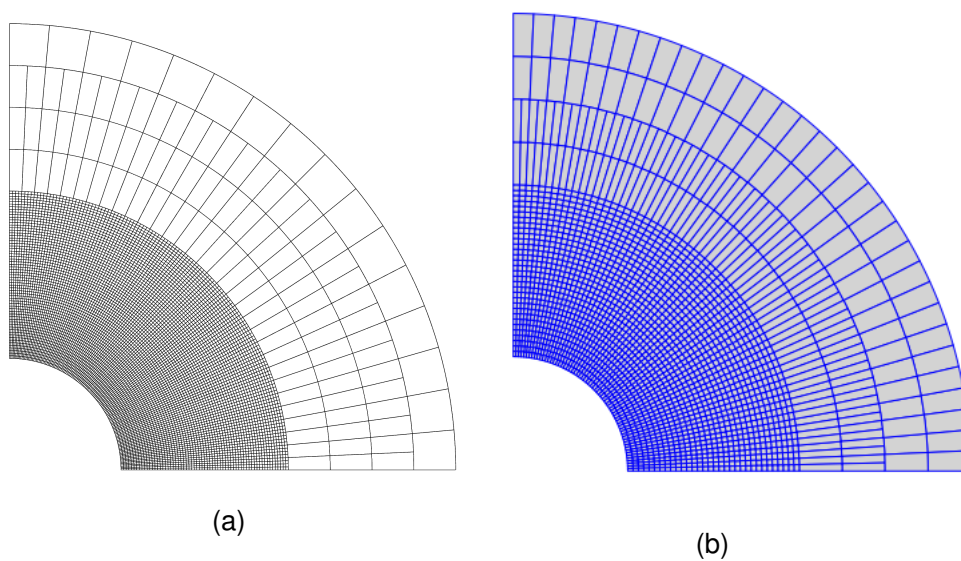


FIGURA 72 – a) T-MALHA APÓS O 4º REFINAMENTO, EXTRAÍDA DO *SOFTWARE* RHINO, REFERENTE À AIGB-TSPLINE-1. b) T-ELEMENTOS/ELEMENTOS DE BÉZIER CORRESPONDENTES À T-MALHA APRESENTADA EM a).

FONTE: O autor (2017).

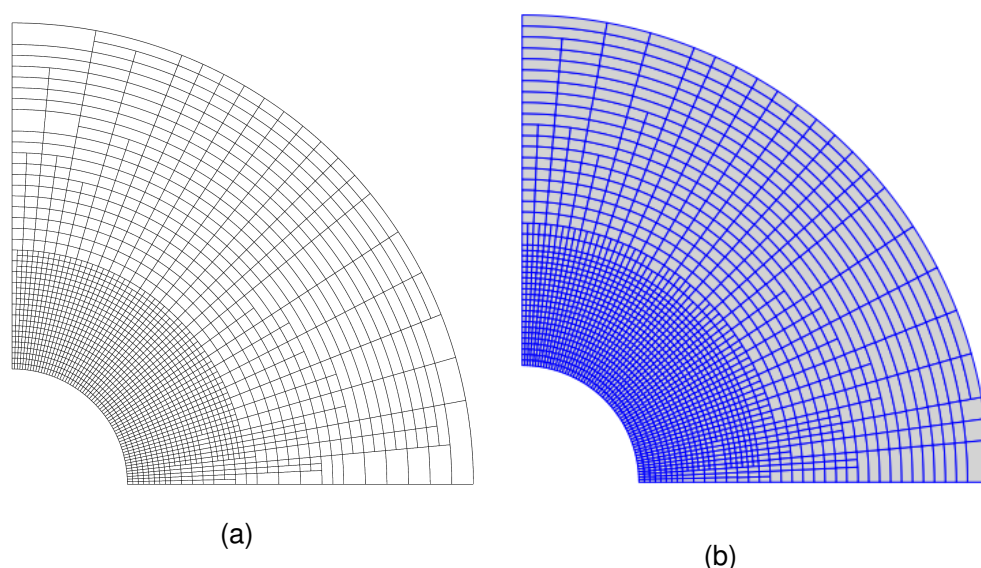


FIGURA 73 – a) T-MALHA APÓS O 4º REFINAMENTO, EXTRAÍDA DO SOFTWARE RHINO, REFERENTE À AIGB-TSPLINE-2 b) T-ELEMENTOS/ELEMENTOS DE BÉZIER CORRESPONDENTES À T-MALHA APRESENTADA EM a).

FONTE: O autor (2017).

Na FIGURA 74 pode ser visto o estudo da convergência das soluções obtidas para cada análise. Para tal avaliação foi escolhido o erro relativo na norma em energia. Os valores referentes à FIGURA 74 estão resumidos nas Tabelas 9-12.

Para esse problema foram realizadas duas tentativas de refino para AIG baseada nas T-splines. No primeiro caso (AIGB-TSPLINE-1), observou-se que o erro relativo decresce mais rapidamente para um menor número de graus de liberdade quando comparado com os outros métodos. No entanto, nota-se que para os dois últimos refinamentos o erro não mantém o mesmo padrão de decrescimento. A fim de avaliar se esse desvio seria proveniente dos dados importados do *software* Rhino, optou-se por utilizar uma malha não uniforme para a AIG baseada em NURBS (AIG-NURBS-G3-REF.NU) e para a qual constatou-se o mesmo padrão encontrado na análise com as T-splines. Em uma segunda tentativa (AIGB-TSPLINE-2), encontrou-se a mesma tendência da AIGB-TSPLINE-1.

Observa-se, também, que para esse problema as malhas de proporção 1:1 entre os elementos geraram resultados melhores do que para as malhas com proporção 1:2. Ainda, nota-se que as análises isogeométricas foram superiores às análises com elementos finitos de Lagrange, apresentando erros menores.

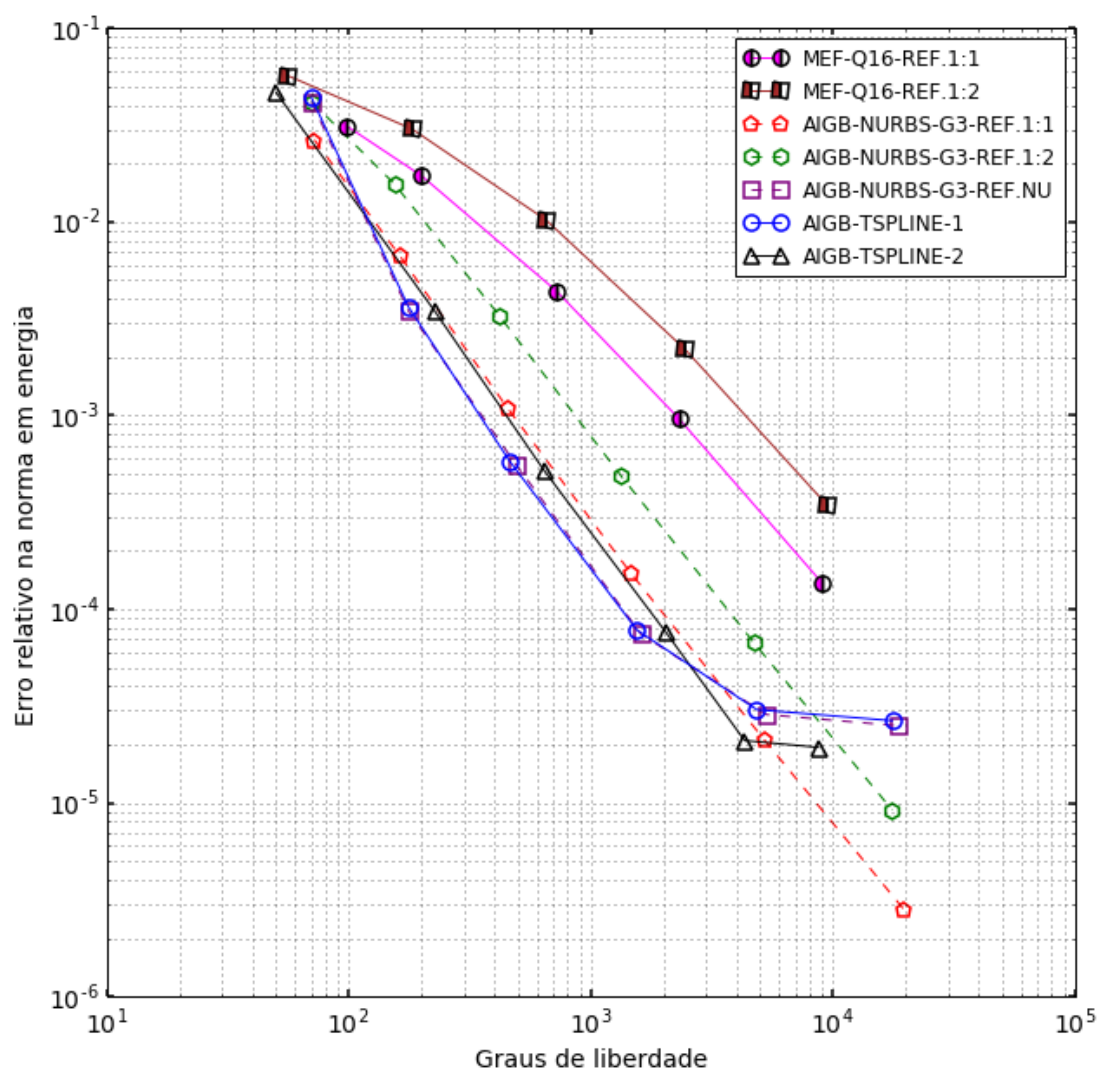


FIGURA 74 – ERRO RELATIVO NA NORMA EM ENERGIA *VERSUS* NÚMERO TOTAL DE GRAUS DE LIBERDADE PARA O PROBLEMA DA CHAPA COM FURO CIRCULAR.

FONTE: O autor (2017).

TABELA 9 – VALORES DO ERRO RELATIVO NA NORMA DE ENERGIA CONSIDERANDO DIFERENTES GDL'S PARA AS ANÁLISES FEM-Q16-REF.1:1 E FEM-Q16-REF.1:2 DO PROBLEMA DA CHAPA COM FURO CIRCULAR.

FEM-Q16 REF. 1:1			FEM-Q16 REF. 1:2		
GDL	$(e_E)_{rel}$	$(e_E)_{rel}(\%)$	GDL	$(e_E)_{rel}$	$(e_E)_{rel}(\%)$
98	3,12017950e-02	3,12%	56	5,67134599e-02	5,67%
200	1,72366728e-02	1,72%	182	3,01669337e-02	3,02%
722	4,37443340e-03	0,44%	650	1,02456583e-02	1,02%
2312	9,61107545e-04	0,10%	2450	2,19098043e-03	0,22%
8978	1,37331638e-04	0,01%	9506	3,41550142e-04	0,03%

FONTE: O autor (2017).

TABELA 10 – VALORES DO ERRO RELATIVO NA NORMA EM ENERGIA CONSIDERANDO DIFERENTES GDL'S PARA AS ANÁLISES AIGB-NURBS-G3-REF.1:1 E AIGB-NURBS-G3-REF.1:2 DO PROBLEMA DA CHAPA COM FURO CIRCULAR.

AIGB-NURBS-G3 REF. 1:1			AIGB-NURBS-G3 REF. 1:2		
GDL	$(e_E)_{rel}$	$(e_E)_{rel}(\%)$	GDL	$(e_E)_{rel}$	$(e_E)_{rel}(\%)$
72	2,64729795e-02	2,65%	70	4,17501153e-02	4,18%
162	6,68217946e-03	0,67%	154	1,56917596e-02	1,57%
450	1,09969554e-03	0,11%	418	3,27500524e-03	0,33%
1458	1,53888998e-04	0,02%	1330	4,87798412e-04	0,05%
5202	2,11327856e-05	0,00%	4690	6,75654479e-05	0,01%
19602	2,81805266e-06	0,00%	17554	9,18429756e-06	0,00%

FONTE: O autor (2017).

TABELA 11 – VALORES DO ERRO RELATIVO NA NORMA EM ENERGIA CONSIDERANDO DIFERENTES GDL'S PARA A ANÁLISE AIGB-NURBS-G3-REF.NU DO PROBLEMA DA CHAPA COM FURO CIRCULAR.

AIGB-NURBS-G3 REF. NU		
GDL	$(e_E)_{rel}$	$(e_E)_{rel}(\%)$
70	4,17501153e-02	4,18%
176	3,47131560e-03	0,35%
494	5,50326867e-04	0,06%
1610	7,43814866e-05	0,01%
5304	2,85630255e-05	0,00%
18602	2,49840545e-05	0,00%

FONTE: O autor (2017).

TABELA 12 – VALORES DO ERRO RELATIVO NA NORMA EM ENERGIA CONSIDERANDO DIFERENTES GDL'S PARA AS ANÁLISES AIGB-TSPLINE-1 E AIGB-TSPLINE-2 DO PROBLEMA DA CHAPA COM FURO CIRCULAR.

AIGB-TSPLINE-1			AIGB-TSPLINE-2		
GDL	$(e_E)_{rel}$	$(e_E)_{rel}(\%)$	GDL	$(e_E)_{rel}$	$(e_E)_{rel}(\%)$
70	4,37798450e-02	4,38%	50	4,64556287e-02	4,65%
176	3,64007759e-03	0,36%	226	3,46199942e-03	0,35%
462	5,79347365e-04	0,06%	638	5,22906960e-04	0,05%
1546	7,81094261e-05	0,01%	2042	7,57456096e-05	0,01%
4842	3,02813782e-05	0,00%	4312	2,09787657e-05	0,00%
17578	2,65747428e-05	0,00%	8690	1,93458576e-05	0,00%

FONTE: O autor (2017).

Na FIGURA 75 podem ser conferidas as distribuições das tensões obtidas através da AIGB-TSPLINE-2, correspondentes à malha apresentada na FIGURA 73b. Na FIGURA 76, têm-se os deslocamentos obtidos na direção x e na direção y para essa malha.

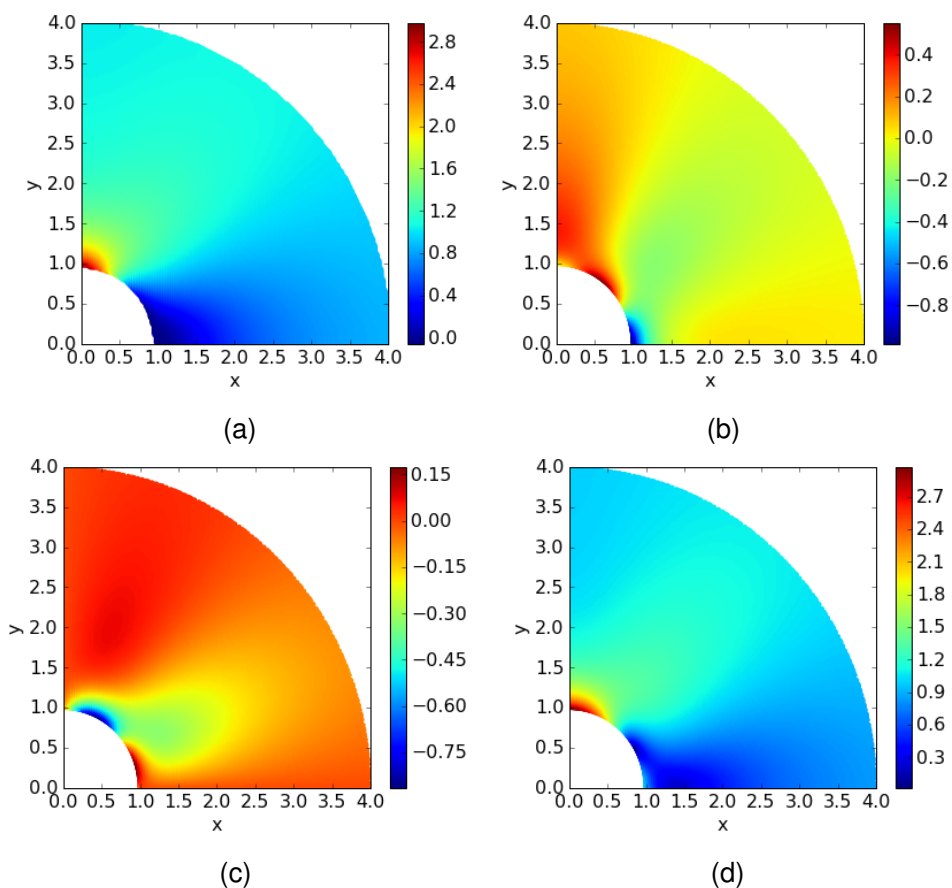


FIGURA 75 – TENSÕES NA CHAPA COM FURO CIRCULAR. a) σ_x . b) σ_y . c) τ_{xy} . d) VON MISES.
FONTE: O autor (2017).

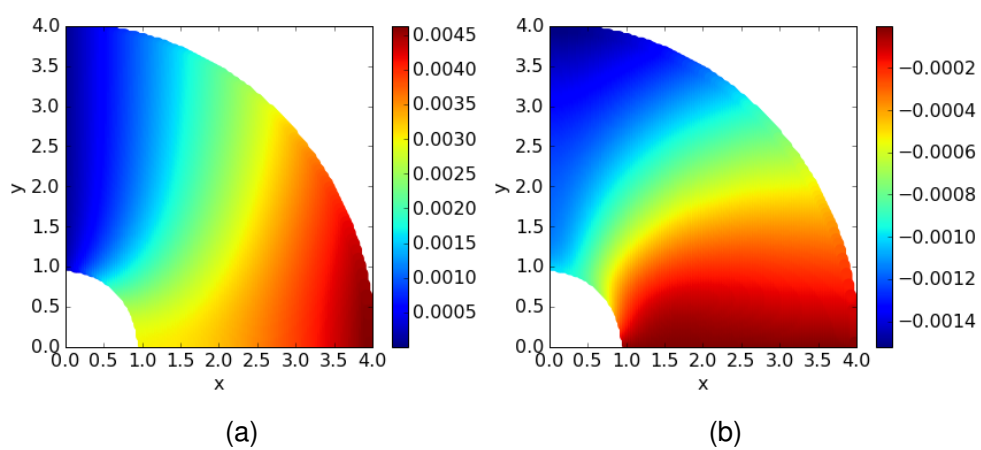


FIGURA 76 – DESLOCAMENTOS NA CHAPA COM FURO CIRCULAR. a) DIREÇÃO x. b) DIREÇÃO y.
FONTE: O autor (2017).

5.4 CHAPA EM L

Na FIGURA 77 pode ser visto a configuração do problema de uma chapa em L tracionada no bordo esquerdo. A chapa possui uma espessura unitária. Os parâmetros de elasticidade empregados são: módulo de elasticidade $E = 1$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. A tração imposta é $T_x = 1$. O problema é analisado sob as condições do estado plano de tensões. A energia de deformação estimada $U = 15.566,46$ foi obtida de XUAN (2008).

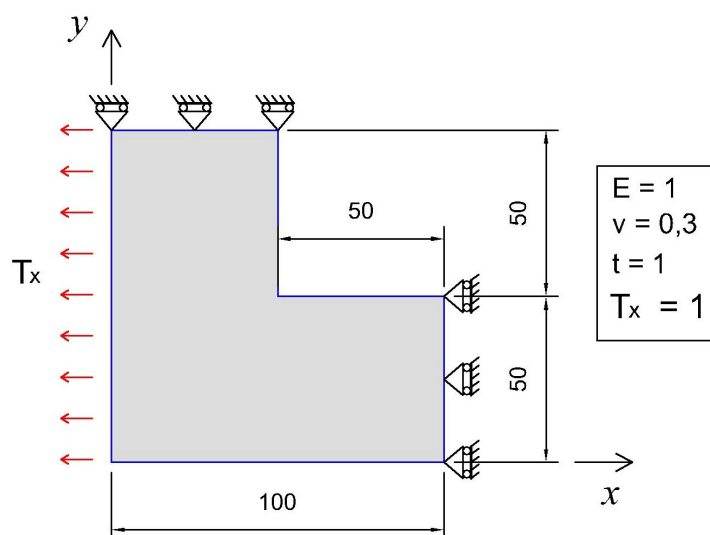


FIGURA 77 – PROBLEMA DE UMA CHAPA EM L TRACIONADA.
FONTE: O autor (2017).

Para esse problema foram realizadas as seguintes análises: MEF-Q16-REF.1:1, AIGB-NURBS-G3-REF.1:1, AIGB-NURBS-G3-REF.NU e AIGB-TSPLINE-1. As malhas utilizadas nessas análises podem ser vistas nas FIGURAS 78-81. Na FIGURA 82a pode ser observada a T-malha representada no espaço físico, extraída do *software* Rhino, e na FIGURA 82b podem ser observados os T-elementos/Elementos de Bézier correspondentes à essa malha.

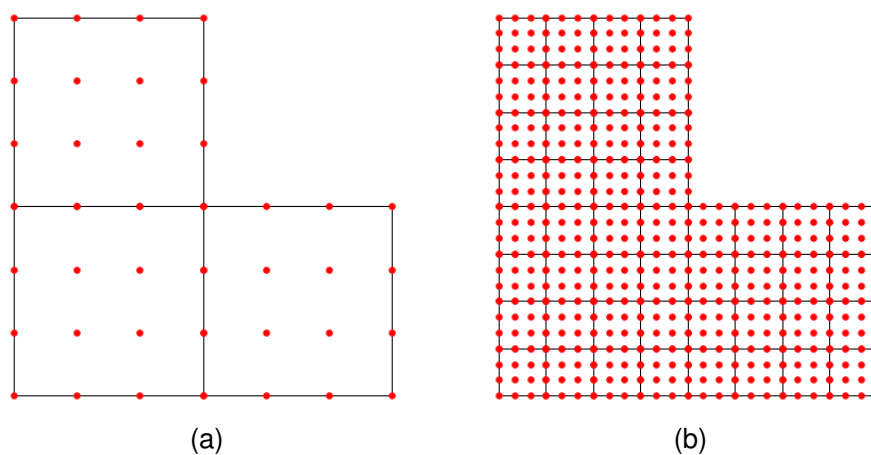


FIGURA 78 – MALHA FÍSICA E NÓS DOS ELEMENTOS REFERENTES À FEM-Q16-REF.1:1. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.

FONTE: O autor (2017).

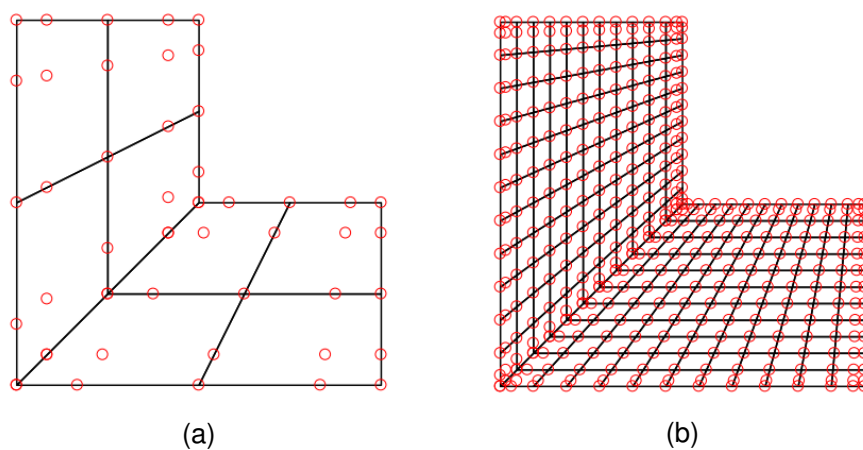


FIGURA 79 – MALHA FÍSICA E PONTOS DE CONTROLE (CÍRCULOS) REFERENTES À AIG-NURBS-G3-REF.1:1. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.

FONTE: O autor (2017).

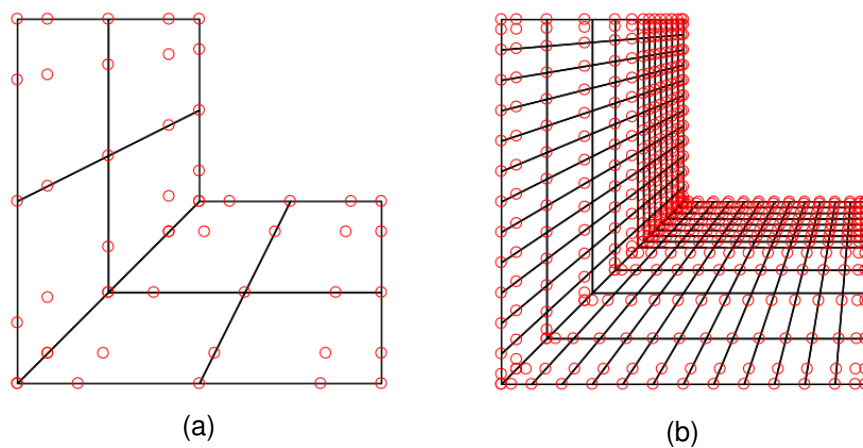


FIGURA 80 – MALHA FÍSICA E PONTOS DE CONTROLE (CÍRCULOS) REFERENTES À AIG-NURBS-G3-REF.NU. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.

FONTE: O autor (2017).

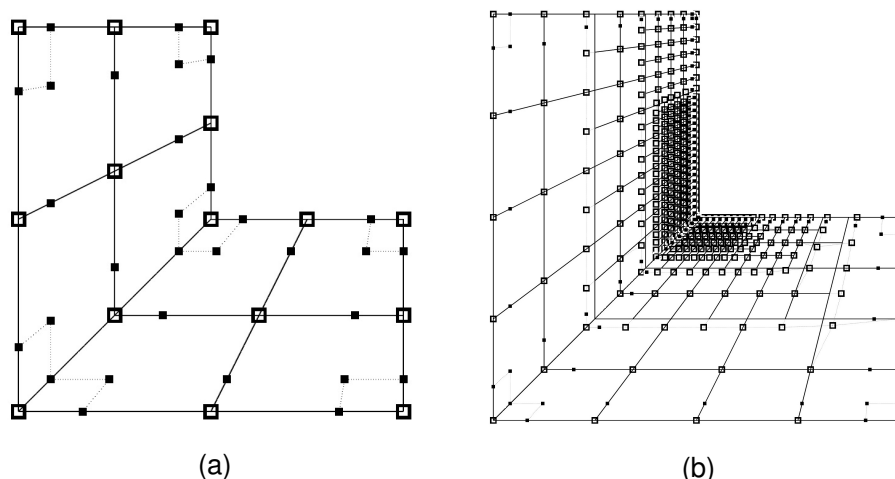


FIGURA 81 – T-MALHA NO ESPAÇO FÍSICO E PONTOS DE CONTROLE (QUADRADOS) REFERENTES À AIGB-TSPLINE-1, EXTRAÍDOS DO SOFTWARE RHINO. a) MALHA INICIAL. b) MALHA APÓS O SEGUNDO REFINAMENTO.

FONTE: O autor (2017).

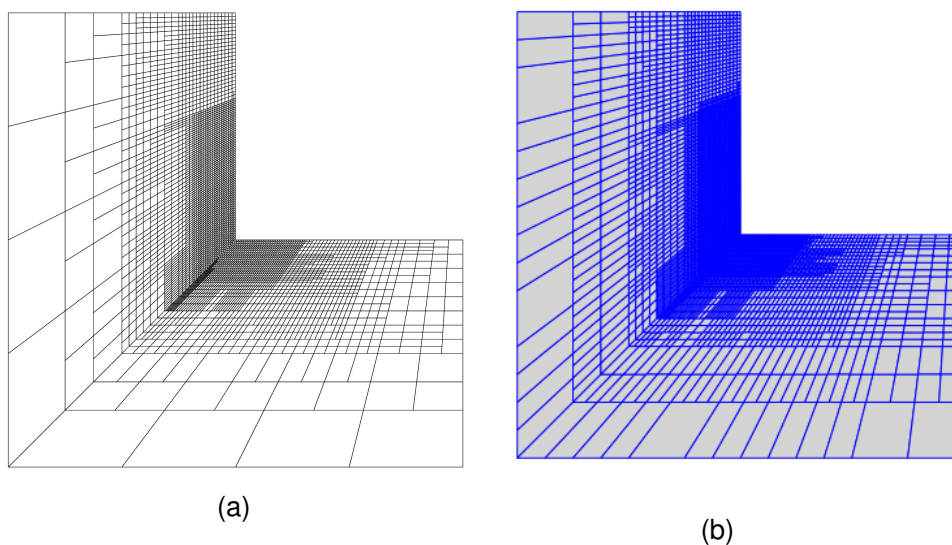


FIGURA 82 – a) T-MALHA APÓS O 4º REFINAMENTO, EXTRAÍDA DO SOFTWARE RHINO, REFERENTE À AIGB-TSPLINE-1. b) T-ELEMENTOS/ELEMENTOS DE BÉZIER CORRESPONDENTES À T-MALHA APRESENTADA EM a).

FONTE: O autor (2017).

Para a análise da convergência das soluções utilizou-se o cálculo da energia de deformação (FIGURA 83) e o erro relativo na energia de deformação (FIGURA 84), para este último os valores estão resumidos nas TABELAS 13-14. Nota-se que foram obtidos erros menores para a AIG baseada nas T-splines (AIGB-TSPLINE-1) quando comparado à AIG baseada em NURBS e ao MEF.

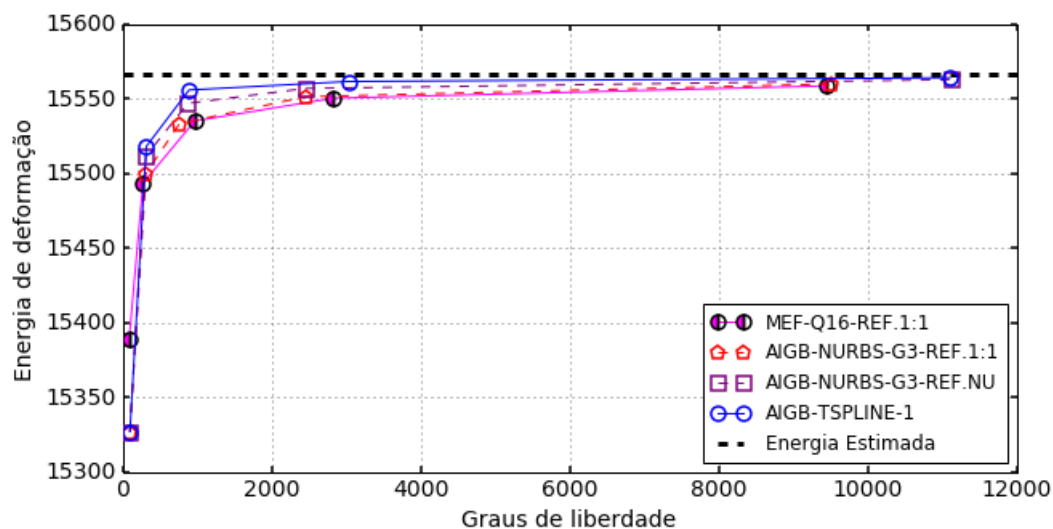


FIGURA 83 – ENERGIA DE DEFORMAÇÃO *VERSUS* NÚMERO TOTAL DE GRAUS DE LIBERDADE PARA O PROBLEMA DA CHAPA EM L.

FONTE: O autor (2017).

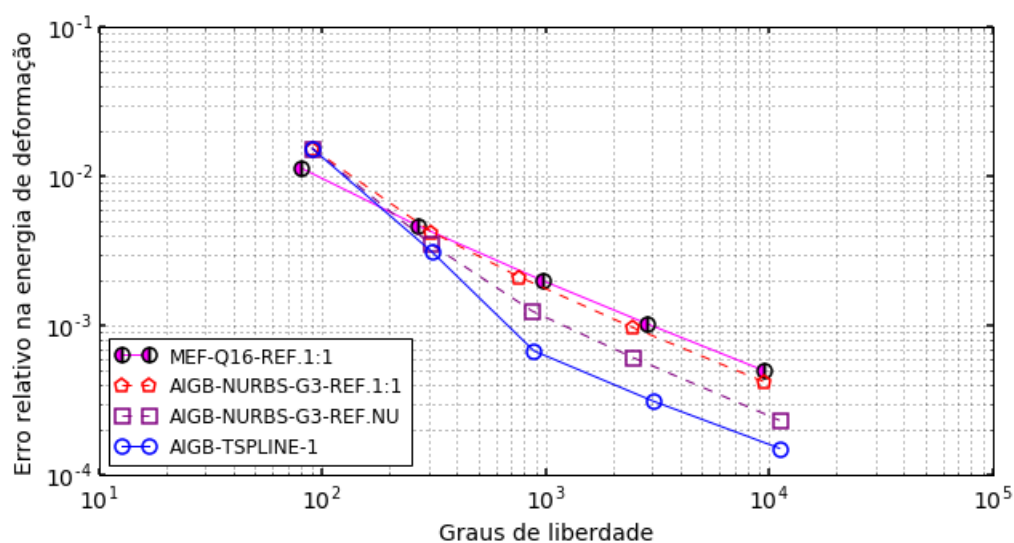


FIGURA 84 – ERRO RELATIVO NA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO *VERSUS* NÚMERO TOTAL DE GRAUS DE LIBERDADE PARA O PROBLEMA DA CHAPA EM L.

FONTE: O autor (2017).

Nas TABELAS 13-15 estão resumidos os resultados obtidos para as análises FEM-Q16-REF.1:1, AIGB-NURBS-G3-REF.1:1, AIGB-NURBS-G3-REF.NU e AIGB-TSPLINE-1.

TABELA 13 – VALORES DO ERRO NA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO DIFERENTES GDL'S PARA AS ANÁLISES FEM-Q16-REF.1:1 DO PROBLEMA DA CHAPA EM L.

FEM-Q16- REF.1:1		
GDL	$(e_U)_{rel}$	$(e_U)_{rel}(\%)$
80	1,13902583e-02	1,14%
266	4,68939630e-03	0,47%
962	2,01026438e-03	0,20%
2816	1,03491738e-03	0,10%
9440	5,01160829e-04	0,05%

FONTE: O autor (2017).

TABELA 14 – VALORES DO ERRO NA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO DIFERENTES GDL'S PARA AS ANÁLISES AIGB-NURBS-G3-REF.1:1 E AIGB-NURBS-G3-REF.NU DO PROBLEMA DA CHAPA EM L.

AIGB-NURBS-G3- REF.1:1			AIGB-NURBS-G3- REF.NU		
GDL	$(e_U)_{rel}$	$(e_U)_{rel}(\%)$	GDL	$(e_U)_{rel}$	$(e_U)_{rel}(\%)$
90	1,53798873e-02	1,54%	90	1,53798873e-02	1,54%
306	4,26794531e-03	0,43%	306	3,50962261e-03	0,35%
756	2,12869850e-03	0,21%	870	1,25110655e-03	0,13%
2450	9,70625306e-04	0,10%	2450	6,11680498e-04	0,06%
9506	4,19671525e-04	0,04%	11130	2,32152975e-04	0,02%

FONTE: O autor (2017).

TABELA 15 – VALORES DO ERRO NA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO DIFERENTES GDL'S PARA AS ANÁLISES AIGB-TSPLINE-1 DO PROBLEMA DA CHAPA EM L.

AIGB-TSPLINE-1		
GDL	$(e_U)_{rel}$	$(e_U)_{rel}(\%)$
90	1,53798873e-02	1,54%
310	3,10933250e-03	0,31%
884	6,78111786e-04	0,07%
3030	3,11946326e-04	0,03%
11106	1,50997722e-04	0,02%

FONTE: O autor (2017).

Na FIGURA 85 podem ser conferidas as distribuições das tensões obtidas através da AIG baseada nas T-splines, correspondetes à malha da FIGURA 82b. Na FIGURA 86, têm-se os deslocamentos obtidos na direção x e na direção y para essa malha.

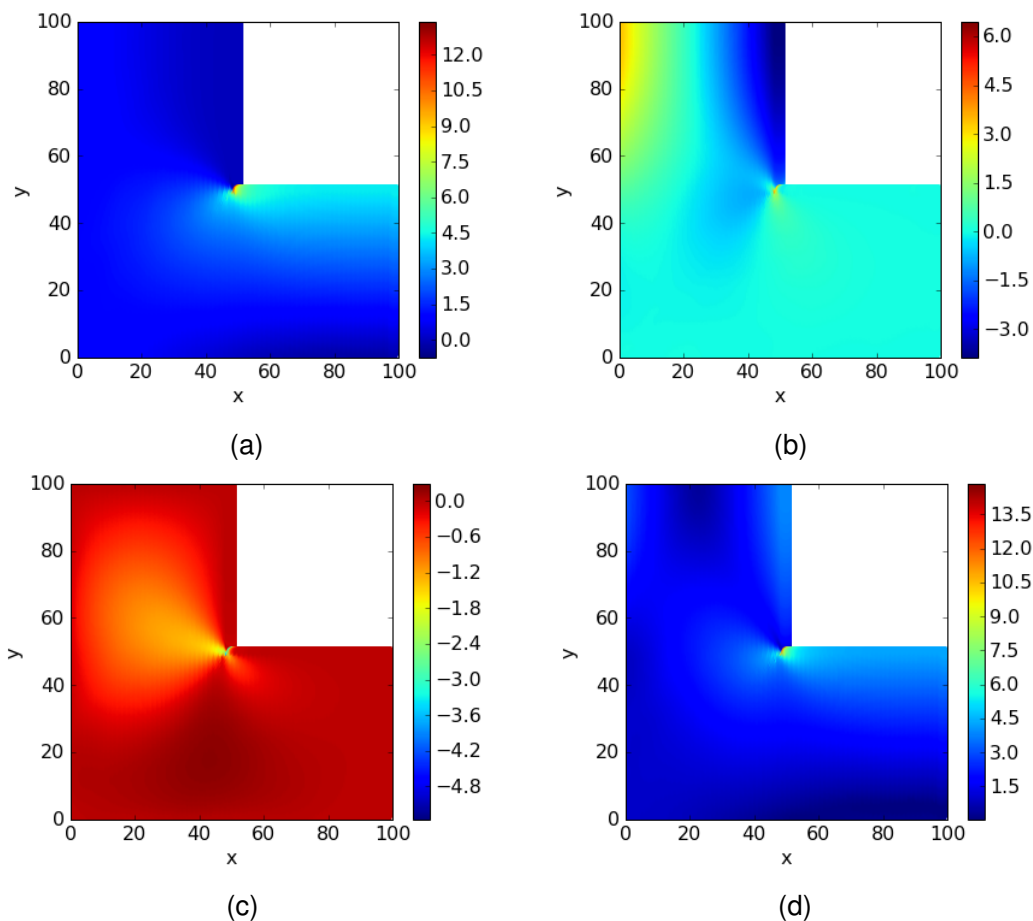


FIGURA 85 – TENSÕES NA CHAPA EM L. a) σ_x . b) σ_y . c) τ_{xy} . d) VON MISES.
FONTE: O autor (2017).

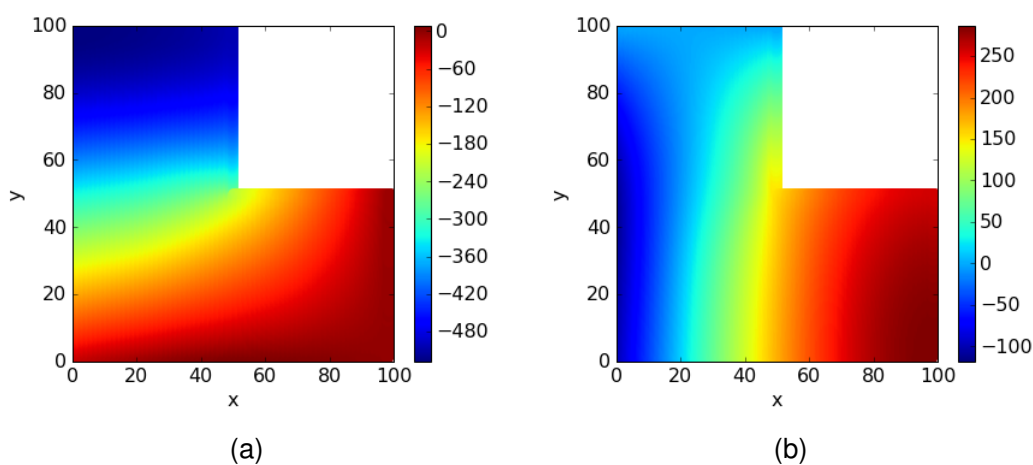


FIGURA 86 – DESLOCAMENTOS NA CHAPA EM L. a) DIREÇÃO X. b) DIREÇÃO Y.
FONTE: O autor (2017).

5.5 BARRAGEM

O último problema a ser abordado é o caso de uma barragem sob pressões hidrostáticas, como pode ser observado na FIGURA 87. O exemplo foi elaborado pelo próprio autor e é uma simplificação de um modelo de uma barragem, pois diversas outras variáveis poderiam ser incluídas. Para esse problema foram utilizados dois materiais diferentes, simbolizados pelo número 1 e o número 2, que representam a barragem e a fundação, respectivamente. Os parâmetros de elasticidade empregados são: módulos de elasticidade $E_1 = 30e + 09$ e $E_2 = 50e + 09$, coeficientes de Poisson $\nu_1 = 0.2$ e $\nu_2 = 0.2$, massas específicas $\gamma_1 = 2500$ e $\gamma_2 = 2800$. A pressão hidrostática calculada no fundo da barragem é $p = 1,1e + 06$. Para esse caso foi aplicado a condição do estado plano de deformações. Na FIGURA 87 podem ser vistos em detalhes os carregamentos aplicados e as condições de contorno.

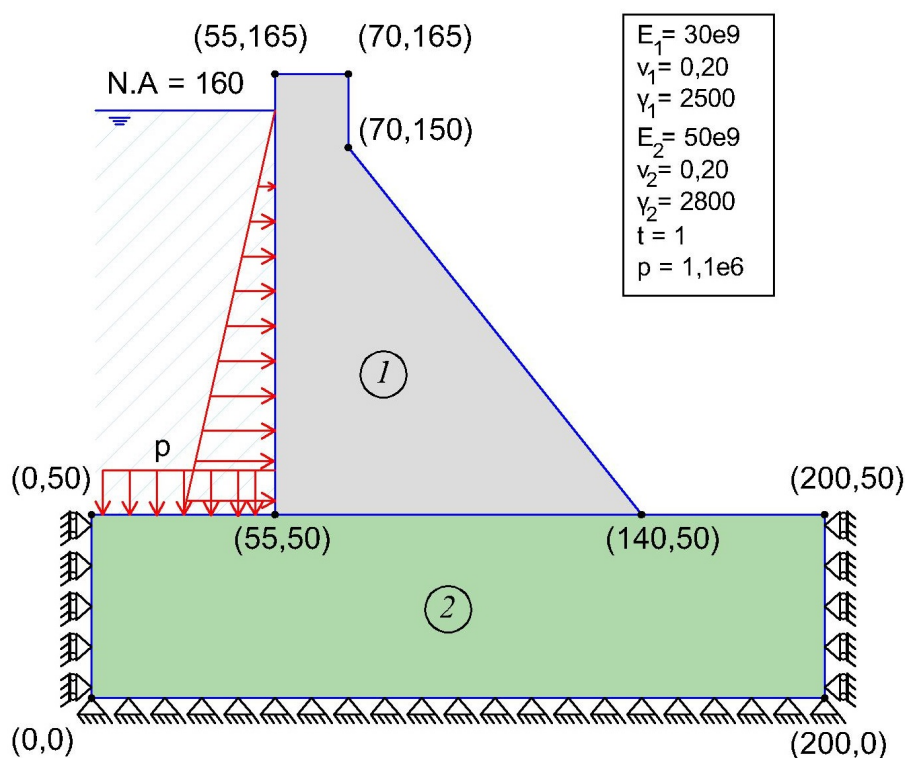


FIGURA 87 – PROBLEMA DE UMA BARRAGEM SOB PRESSÕES HIDROSTÁTICAS.
FONTE: O autor (2017).

Para o problema da barragem, optou-se por realizar a modelagem através do *software* ABAQUS (DASSAULT, 2017) e também pela AIG baseada no uso das T-splines. No *software* ABAQUS foram adotadas malhas compostas por elementos triangulares quadráticos de 6 nós (código: CPE6M) sob a condição do estado plano de deformações. Na FIGURA 88 podem ser visualizadas as malhas adaptativas geradas pelo *software*. Na FIGURA 88a, tem-se a malha inicial e na FIGURA 88b, a malha após quatro etapas de refinamento.

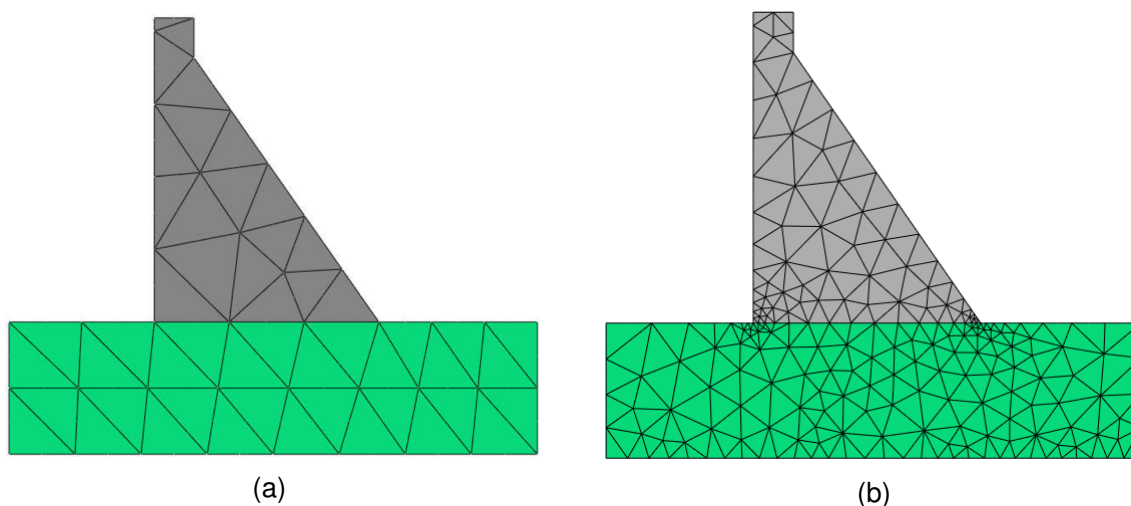


FIGURA 88 – MALHA ADAPTATIVA REFERENTE À ANÁLISE REALIZADA NO SOFTWARE ABAQUS. A) MALHA INICIAL. B) MALHA APÓS O QUARTO REFINAMENTO.

FONTE: O autor (2017).

Uma terceira malha, com 493.426 graus de liberdade e 122.674 elementos, foi produzida no *software* ABAQUS (não exibida aqui devido a densidade de elementos) para obtenção da energia de deformação estimada, $U = 465.002$.

Também para esse problema, aplicou-se a Análise Isogeométrica baseada nas T-splines (AIGB-TSPLINE-1 e AIGB-TSPLINE-2). Uma das T-malhas utilizadas (AIGB-TSPLINE-1), representada no espaço físico, pode ser conferida na FIGURA 89. Na FIGURA 89a, observa-se a malha inicial e na FIGURA 89b, a malha após três refinamentos aplicados. Nesse caso, o refinamento foi feito visando subdividir cada elemento em quatro partes iguais, a cada nova etapa de refinamento, e sem empregar as T-junções.

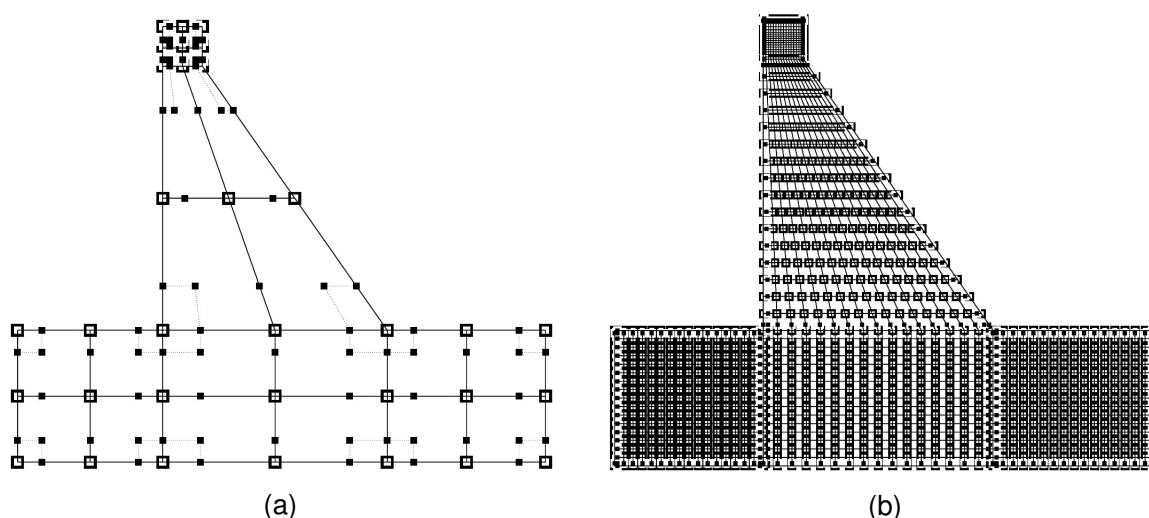


FIGURA 89 – T-MALHA NO ESPAÇO FÍSICO E PONTOS DE CONTROLE (QUADRADOS) REFERENTES À AIGB-TSPLINE-1, EXTRAÍDOS DO *SOFTWARE* RHINO. a) MALHA INICIAL. b) MALHA APÓS O TERCEIRO REFINAMENTO.

FONTE: O autor (2017).

Na FIGURA 90, apresenta-se a segunda T-malha utilizada (AIGB-TSPLINE-2). Para esse caso, as T-junções foram inseridas na T-malha a cada nova etapa de refinamento. Como referência para os locais de aplicação dos refinamentos, adotou-se a malha adaptativa obtida pelo *software* ABAQUS. Nas FIGURAS 90a e 90b, observam-se a T-malha inicial e a T-malha após quatro refinamentos aplicados, respectivamente.

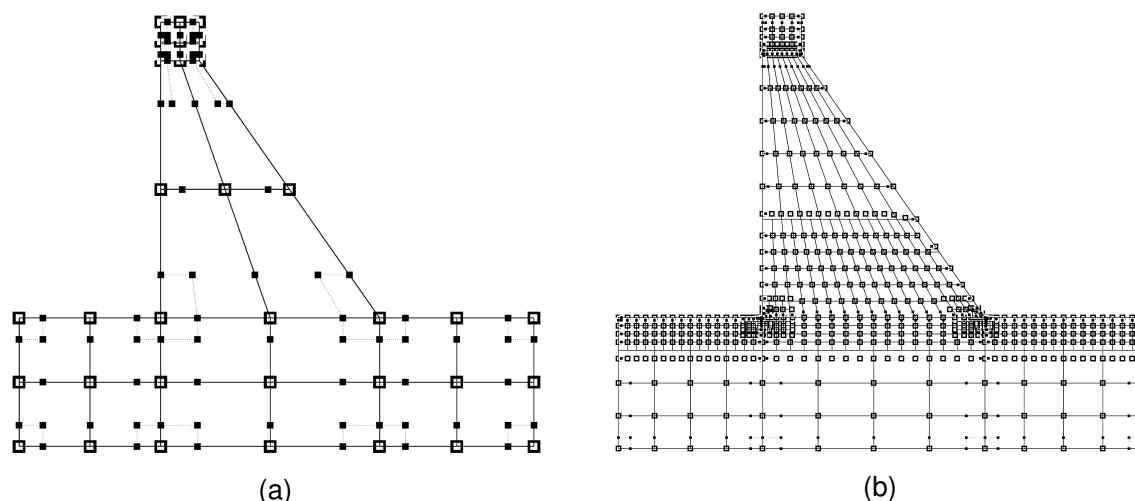


FIGURA 90 – T-MALHA NO ESPAÇO FÍSICO E PONTOS DE CONTROLE (QUADRADOS) REFERENTES À AIGB-TSPLINE-2, EXTRAÍDOS DO *SOFTWARE* RHINO. a) MALHA INICIAL. b) MALHA APÓS O QUARTO REFINAMENTO.

FONTE: O autor (2017).

Na FIGURA 91a são apresentados os T-elementos/Elementos de Bézier, correspondentes a T-malha mostrada na FIGURA 89b e, de maneira semelhante, na FIGURA 91b também são vistos os T-elementos da T-malha da FIGURA 90b

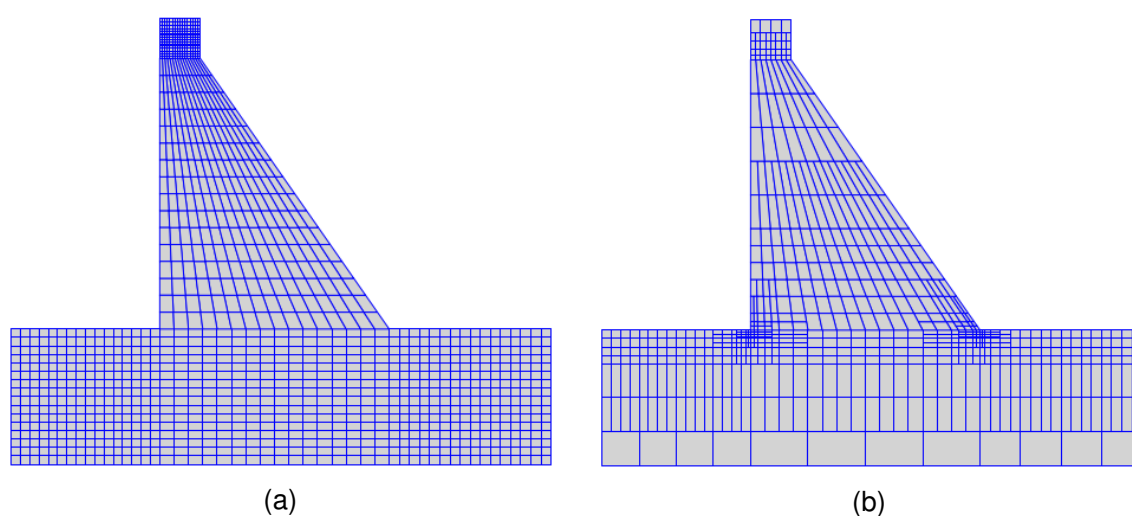


FIGURA 91 – a) T-ELEMENTOS/ELEMENTOS DE BÉZIER CORRESPONDENTE A T-MALHA APRESENTADA NA FIGURA 89b. b) T-ELEMENTOS/ELEMENTOS DE BÉZIER CORRESPONDENTE A T-MALHA APRESENTADA NA FIGURA 90b.

FONTE: O autor (2017).

Em uma primeira avaliação foram comparados os deslocamentos na face da barragem que recebe as pressões hidrostáticas. Os valores obtidos podem ser conferidos nas FIGURA 92-93, onde é possível observar que os resultados gerados pela AIGB-TSPLINE-1, AIGB-TSPLINE-2 e aqueles obtidos através do ABAQUS apresentaram uma boa concordância entre si.

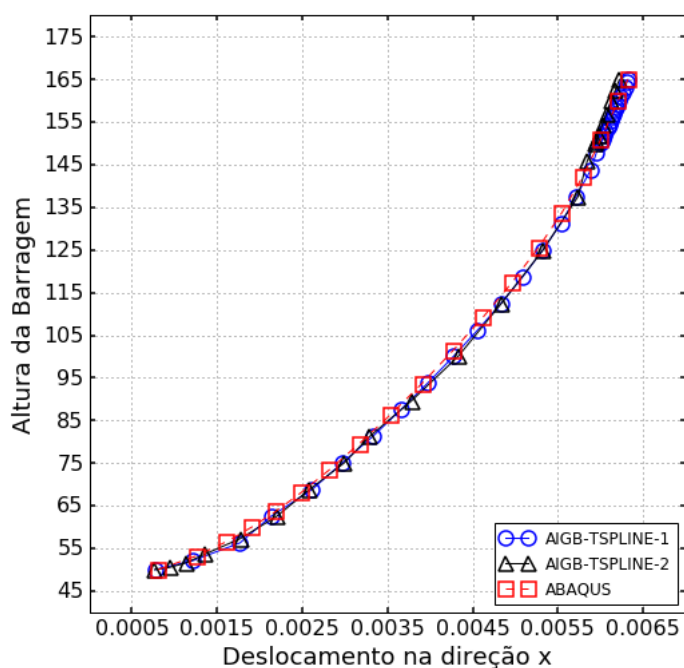


FIGURA 92 – DESLOCAMENTOS NA DIREÇÃO X DA FACE DA BARRAGEM QUE RECEBE AS PRESSÕES HIDROSTÁTICAS.

FONTE: O autor (2017).

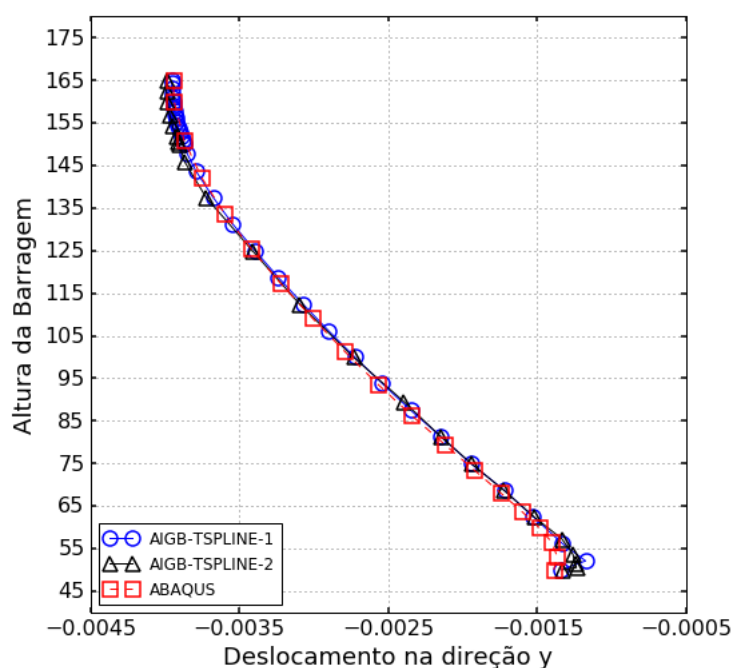


FIGURA 93 – DESLOCAMENTOS NA DIREÇÃO Y DA FACE DA BARRAGEM QUE RECEBE AS PRESSÕES HIDROSTÁTICAS.

FONTE: O autor (2017).

Na FIGURA 94 e na FIGURA 95 são apresentados os campos de deslocamentos nas direções x e y, respectivamente, obtidos para todo o problema em análise. Nota-se novamente uma concordância entre os resultados obtidos pelo ABAQUS e pela AIGB-TSPLINE-2.

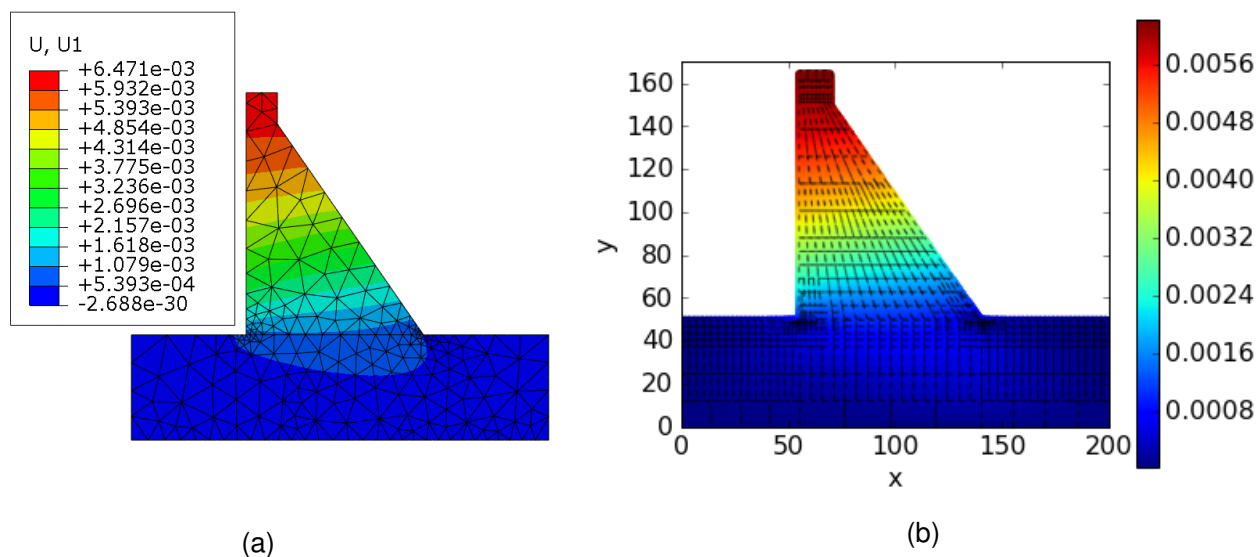


FIGURA 94 – DESLOCAMENTOS NA DIREÇÃO X. a) ABAQUS b) AIGB-TSPLINE-2.
FONTE: O autor (2017).

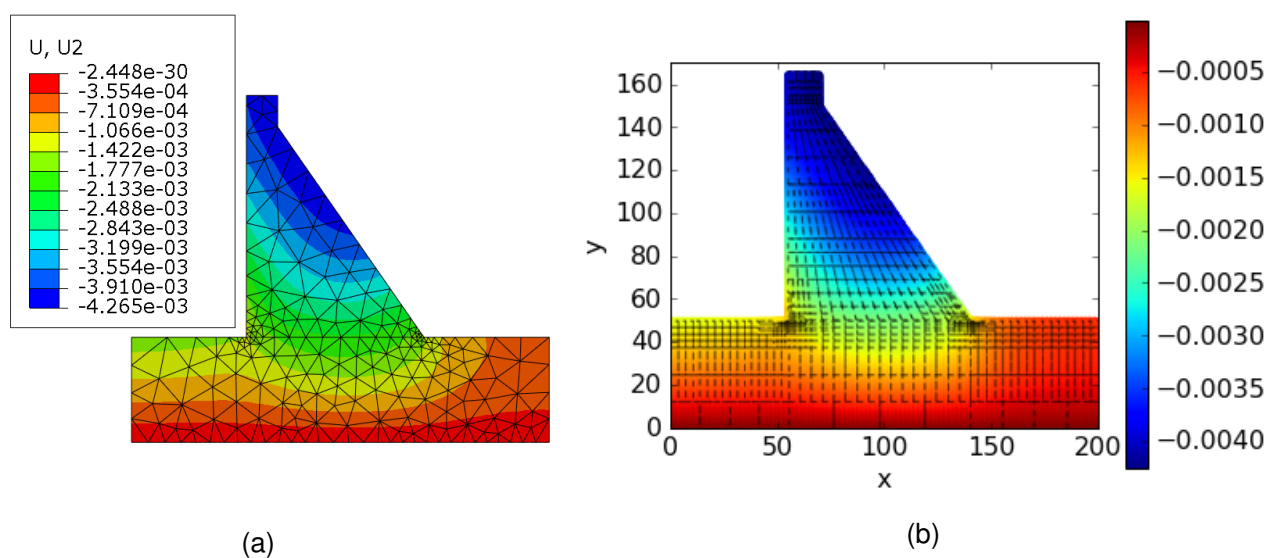


FIGURA 95 – DESLOCAMENTOS NA DIREÇÃO Y. a) ABAQUS b) AIGB-TSPLINE-2.
FONTE: O autor (2017).

Na FIGURA 96 pode ser visualizada a forma deformada do problema da barragem, escalada 5000 vezes, obtida através da AIGB-TSPLINE-2.

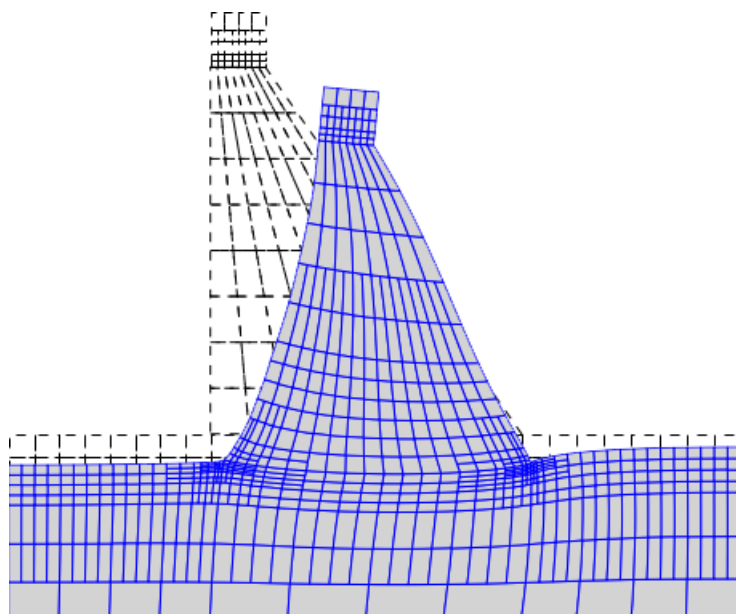


FIGURA 96 – FORMA DEFORMADA DO PROBLEMA DA BARRAGEM, ESCALADA 5000 VEZES, REFERENTE À AIG-TSPLINE-2.

FONTE: O autor (2017).

Na FIGURA 97 estão plotados os valores referentes ao erro relativo na energia de deformação, obtidos para diferentes análises. Esses valores encontram-se resumidos na TABELA 16 e na TABELA 17.

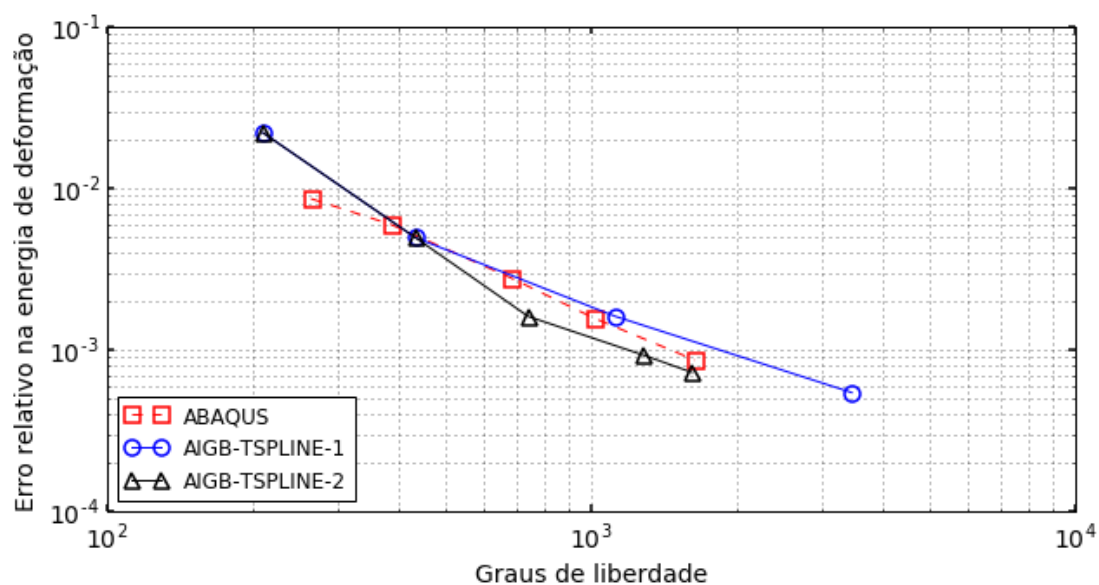


FIGURA 97 – ERRO RELATIVO NA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO *VERSUS* O NÚMERO TOTAL DE GRAUS DE LIBERDADE PARA O PROBLEMA DA BARRAGEM.

FONTE: O autor (2017).

TABELA 16 – VALORES DO ERRO RELATIVO NA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO DIFERENTES GDL'S PARA A ANÁLISE REALIZADA ATRAVÉS DO SOFTWARE ABAQUS PARA O PROBLEMA DA BARRAGEM.

ABAQUS		
GDL	$(e_U)_{rel}$	$(e_U)_{rel}(\%)$
264	8,65587675e-03	0,87%
386	5,99782367e-03	0,60%
682	2,80428901e-03	0,28%
1016	1,57418678e-03	0,16%
1640	8,6662939e-04	0,09%

FONTE: O autor (2017).

TABELA 17 – VALORES DO ERRO RELATIVO NA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO DIFERENTES GDL'S PARA AS ANÁLISES AIGB-TSPLINE-1 E AIGB-TSPLINE-2 PARA O PROBLEMA DA BARRAGEM.

AIGB-TSPLINE-1			AIGB-TSPLINE-2		
GDL	$(e_U)_{rel}$	$(e_U)_{rel}(\%)$	GDL	$(e_U)_{rel}$	$(e_U)_{rel}(\%)$
210	2,21757924e-02	2,22%	210	2,21757924e-02	2,22%
434	4,96364956e-03	0,50%	434	4,96364956e-03	0,50%
1122	1,61751808e-03	0,16%	742	1,61472972e-03	0,16%
3458	5,45507615e-04	0,05%	1278	9,34167524e-04	0,09%
—	—	—	1616	7,27358508e-04	0,07%

FONTE: O autor (2017).

Na FIGURA 98 podem ser conferidas as distribuição das tensões σ_y , onde nota-se que o campo de tensões para as análises ABAQUS e AIGB-TSPLINE-2 também são similares.

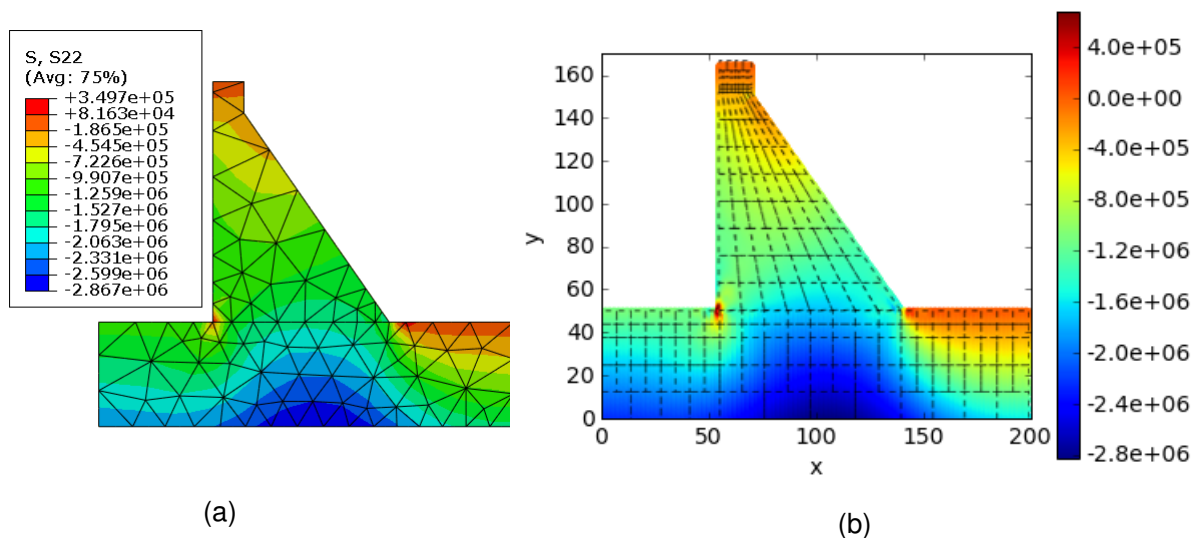


FIGURA 98 – DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES σ_y . a) ABAQUS. b) AIGB-TSPLINE-2.

FONTE: O autor (2017).

Observando-se os valores dos erros relativos da FIGURA 97, nota-se que os resultados oriundos da AIG-TSPLINE-1 e AIG-TSPLINE-2 se aproximaram dos resultados do ABAQUS. E para o caso da AIG-TSPLINE-2, obtiveram-se os menores erros.

No estudo desse problema foi possível observar que a AIG baseada nas T-splines apresentou uma grande sensibilidade ao refinamento imposto na T-malha. Observou-se que quando se aplica uma distribuição mais uniforme dos T-elementos, mesmo com a inclusão das T-junções, obtém-se uma análise mais próxima do esperado, como pode ser visto nas análises apresentadas nesta seção. No entanto, quando se utiliza uma T-malha com um refinamento menos uniforme, ou seja, com os T-elementos e T-junções distribuídos de maneira aleatória, observa-se que a análise tende a sofrer desvios significativos em relação aos valores esperados. Isto foi verificado em algumas tentativas realizadas pelo autor.

Além disso, uma atenção especial foi dada à interface dos dois materiais. Pois, para essas simulações foi necessário o emprego de múltiplos *patches*, sendo para esse caso, apenas dois. E por esse motivo foi necessário um extremo cuidado para garantir a união dos pontos de controle dos dois *patches* nessa interface, principalmente, após a aplicação dos refinamentos.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho aplicou-se a Análise Isogeométrica baseada nas T-splines em problemas da elasticidade linear que envolvem o estado plano de tensões e o estado plano de deformações.

Inicialmente, estudou-se a teoria apresentada por Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005), ou seja, a forma clássica da Análise Isogeométrica baseada em NURBS. Em relação à implementação computacional do método, notou-se uma proximidade com a implementação do Método dos Elementos Finitos, porém, algumas particularidades referentes à implementação da AIG ficam bem evidentes. Uma delas é em relação à obtenção da quantidade de funções que possuem suporte em um determinado elemento e que contribuem para o cálculo da matriz de rigidez desse elemento, pois para a determinação destas funções é essencial o entedimento do espaço indicial, do espaço paramétrico e das matrizes de conectividade (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005). Outro ponto a ser destacado são os mapeamentos empregados na AIG clássica, pois faz-se necessário o uso de dois mapeamentos, os quais mapeiam pontos do domínio de integração ao espaço físico passando por um espaço paramétrico. Isso, à primeira vista, adiciona um pequeno grau de complexidade na aplicação do método. Por esse motivo, neste trabalho, optou-se pela implementação da Análise Isogeométrica com o uso da Extração de Bézier, pois além de tornar mais direto esse mapeamento, diversos trabalhos (SCOTT et al., 2011) (NGUYEN, 2011) apontam que o uso deste artifício aproxima ainda mais a AIG ao MEF, além de facilitar a implementação computacional da AIG. Notou-se ainda que, quando se aplica a AIG baseada nas T-splines com o uso da Extração de Bézier, essa facilidade fica ainda mais evidente.

Em relação à criação de geometrias com NURBS e T-splines percebeu-se uma grande limitação quanto à utilização de um único *patch*, pois dessa forma foi possível apenas a análise de problemas que envolviam geometrias simples, sendo dificultosa a manipulação dos pontos de controle, ou dos pesos relativos, para a criação de formas geométricas com um grau maior de complexidade. Por esses motivos, recomenda-se o estudo da AIG com o uso de múltiplos *patches* para facilitar a implementação do método e aumentar o número de possibilidades para criação de formas geométricas.

Com relação aos resultados obtidos no capítulo 05, observou-se que nem todos os problemas analisados com o uso das T-splines apresentaram ganhos significativos quando observado a convergência das soluções. O ganho mais expressivo se dá ao analisar problemas que geram concentração de tensões acentuadas, como pode-se observar no caso da chapa em L. Para o caso da viga circular com deslocamento prescrito, como já havia sido apontado por Nguyen (2011) e aqui averiguado pelo autor, considerando os refinamentos empregados nas malhas desse problema, não se constatou nenhuma vantagem

adicional no uso das T-splines, sendo os resultados obtidos por vezes piores que aqueles encontrados para a AIG baseada em NURBS e para o MEF com elementos de Lagrange. Para a placa com furo circular, observou-se uma convergência melhor para os primeiros refinamentos com o uso das T-splines, mas apesar disso, ao se continuar o processo de refinamento foram obtidos desvios significativos nas curvas de evolução do erro, o que fez com que o uso das NURBS fosse mais apropriado para as malhas mais refinadas.

Para o último caso analisado, o problema da barragem, explorou-se o uso de múltiplos *patches* com as T-splines. Observou-se que o uso de múltiplos *patches* facilitou o estudo desse problema, que apresenta uma geometria com um grau de complexidade um pouco maior. No entanto, quando se fez uso do refinamento local, propiciado pelo uso das T-junções, foi necessário uma atenção especial nas regiões de encontro dos *patches*, pois os pontos de controle localizados nessas regiões precisam coincidir suas posições para que possam ser tratados como um mesmo grau de liberdade. Em relação ao problema, constatou-se que os resultados obtidos se mostraram de acordo com aqueles obtidos pelo *software* ABAQUS. Como exposto no comentário relativo a esse problema, obteve-se uma grande vantagem no uso de T-junções em relação ao refinamento em que não se utiliza as T-junções, pois com um menor número de graus de liberdade obteve-se uma tendência de convergência mais rápida. A sensibilidade das malhas ao uso das T-junções é bastante evidente nesse problema, pois dependendo do posicionamento dessas T-junções, percebeu-se que as soluções obtidas, apesar de não apresentadas aqui, apresentaram desvios significativos aos resultados esperados.

Com base no observado nesse trabalho e no trabalho de Nguyen-Thanh et al. (2011), pressupõe-se que a aplicação das T-splines na AIG tende a ser mais eficiente quando se utiliza um algoritmo adaptativo em que é possível ter o controle das regiões a serem refinadas localmente, pois as tentativas de refinamento aplicadas neste trabalho foram baseadas em critérios visuais com base na análise da distribuição de tensões de Von Mises, ou no caso da barragem, tendo como referência a malha adaptativa gerada pelo ABAQUS.

O refinamento das T-malhas é outro ponto que merece destaque. Neste trabalho não se tratou sobre as técnicas de refinamento das T-splines, apenas utilizou-se o algoritmo de refinamento presente no *software* Rhino. Percebeu-se uma certa dificuldade na aplicação dos refinamentos, pois em algumas situações encontradas nos problemas estudados, ao se tentar refinar localmente alguma região da T-malha, notou-se que algumas regiões vizinhas também eram refinadas, o que por vezes gerou T-malhas sem T-junções, situação que não era desejada. Essa questão também foi percebida por outros autores e foi amplamente discutida em alguns trabalhos (SEDERBERG et al., 2004) (DENG et al., 2008) sendo considerado um dos problemas da aplicação da AIG baseada nas T-splines. Esse assunto é também explorado em trabalhos recentes sobre as PHT-splines e as RHT-splines, nos quais são propostas soluções para esse tipo de problema.

O uso do *software* Rhino facilitou consideravelmente a aplicação da AIG baseada nas T-splines, principalmente pelo fato de disponibilizar toda a estruturação de dados envolvendo a extração de Bézier para aplicação direta na análise numérica. Ressalta-se que o *plugin* utilizado para aplicação das T-splines dentro do *software* Rhino teve o suporte descontinuado pela empresa desenvolvedora, portanto a tendência é a utilização de novos *softwares* para este fim.

Neste trabalho, os resultados apresentados mostraram que a taxa de convergência das soluções obtidas através da AIG baseada em NURBS são similares ao MEF, contudo, apresentaram erros menores. Em relação as T-splines, apesar do seu uso na AIG fornecer uma boa aproximação aos resultados esperados, percebeu-se, como ponto negativo, uma grande sensibilidade da T-malha quanto à inclusão das T-junções, o que por vezes gerou desvios significativos nas taxas de convergências obtidas. Para o caso da comparação com os resultados do *software* ABAQUS, constatou-se uma ótima concordância com os resultados obtidos com o uso das T-splines.

Conforme as análises feitas com a AIG baseada no uso das T-splines, não se pode afirmar categoricamente que a sua aplicação é mais ou menos vantajosa que a aplicação da AIG baseada em NURBS, pois para se chegar a essa conclusão deve-se levar em consideração alguns fatores, tais como: o tipo do problema analisado; a forma de aplicação dos refinamentos; a localização das T-junções; se o problema apresenta ou não concentração de tensões.

Por fim, percebe-se que muito ainda pode ser investigado por meio da Análise Isogeométrica e assim são sugeridos como futuros trabalhos os seguintes temas:

- aplicação da Análise Isogeométrica (NURBS ou T-splines) em problemas de maior complexidade geométrica e que apresentem a inclusão de detalhes como, por exemplo, soldas e parafusos;
- aplicação da AIG em problemas de contato;
- utilização da Análise Isogeométrica Estendida (XIGA) em problemas de propagação de trincas;
- investigação da Análise Isogeométrica baseada no uso das PHT-splines ou RHT-splines.

REFERÊNCIAS

- Autodesk Inc. **Autodesk T-Splines Plug-in for Rhino**. 2013. Disponível em: <<http://www.tsplines.com/products/tsplines-for-rhino.html>>. Citado na página 160.
- Autodesk Inc. **Fusion 360 - Features**. 2017. Disponível em: <<https://www.autodesk.com/products/fusion-360/features>>. Citado na página 30.
- BARROSO, E. S. Dissertação de mestrado, **Análise e otimização de estruturas laminadas utilizando a formulação isogeométrica**. 2015. 156 p. Citado na página 32.
- BAZILEVS, Y. et al. Isogeometric analysis: Approximation, stability and error estimates for h-refined meshes. **Mathematical Methods and Models in Applied Sciences**, v. 16, n. 7, p. 1031–1090, 2006. ISSN 0218-2025. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218202506001455>>. Citado na página 31.
- BAZILEVS, Y. et al. Isogeometric analysis using T-splines. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, n. 5-8, p. 229–263, 2010. ISSN 00457825. Citado 6 vezes nas páginas 32, 35, 58, 59, 61 e 64.
- BELYTSCHKO, T.; BLACK, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 45, n. 5, p. 601–620, jun 1999. ISSN 0029-5981. Citado na página 33.
- BELYTSCHKO, T.; GRACIE, R.; VENTURA, G. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. **Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering**, v. 17, n. 4, p. 043001, jun 2009. ISSN 0965-0393. Citado na página 33.
- BENTE, R. S. **Isogeometric Analysis and Degenerated Mappings**. 107 p. Tese (Doutorado) — Norwegian University of Science and Technology, 2011. Citado na página 79.
- BHARDWAJ, G.; SINGH, I.; MISHRA, B. Numerical Simulation of Plane Crack Problems Using Extended Isogeometric Analysis. **Procedia Engineering**, v. 64, p. 661–670, 2013. ISSN 18777058. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S187770581301655X>>. Citado na página 33.
- BORDEN, M. J. et al. Isogeometric finite element data structures based on Bézier extraction of NURBS. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 87, n. 1-5, p. 15–47, jul 2011. ISSN 00295981. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/nme.2986>>. Citado 4 vezes nas páginas 32, 68, 74 e 84.
- Continuum Analytics. **SPYDER**. 2017. Disponível em: <<https://docs.continuum.io/anaconda/user-guide/tasks/integration/spyder>>. Citado na página 86.
- COTTRELL, J. A. **Isogeometric Analysis and Numerical Modeling of the Fine Scales within the Variational Multiscale Method**. 163 p. Tese (Doutorado) — The University of Texas at Austin, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 32, 35 e 42.
- COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J. R.; BAZILEVS, Y. **Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA**. [S.l.: s.n.], 2009. 1–335 p. ISBN 9780470748732. Citado 4 vezes nas páginas 32, 35, 42 e 79.

COTTRELL, J. A. et al. Isogeometric analysis of structural vibrations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 41-43, p. 5257–5296, 2006. ISSN 00457825. Citado na página 31.

CURRY, H. B.; SCHOENBERG, I. J. On Pólya Frequency Functions IV: The Fundamental Spline Functions and Their Limits. **D'Analyse Mathématique**, p. 71–107, 1966. Citado na página 30.

DASSAULT. **ABAQUS Student Edition**. 2017. Disponível em: <<https://academy.3ds.com/en/software/abaqus-student-edition>>. Citado 2 vezes nas páginas 86 e 116.

De Luycker, E. et al. X-FEM in isogeometric analysis for linear fracture mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 87, n. 6, p. 541–565, aug 2011. ISSN 00295981. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/nme.3121>>. Citado na página 33.

DENG, J. et al. Polynomial splines over hierarchical T-meshes. **Graphical Models**, v. 70, n. 4, p. 76–86, jul 2008. ISSN 15240703. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1524070308000039>>. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 125.

DÖRFEL, M. R.; JÜTTLER, B.; SIMEON, B. Adaptive isogeometric analysis by local h-refinement with T-splines. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, n. 5-8, p. 264–275, 2010. ISSN 00457825. Citado na página 32.

FARIN, G. Chapter 1 - A History of Curves and Surfaces in CAGD. **Handbook of Computer Aided Geometric Design**, p. 1–21, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 30.

FINNIGAN, G. T. **Arbitrary Degree T-Splines**. 34 p. Tese (Doutorado), 2008. Citado na página 32.

FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **A First Course in Finite Elements**. [S.l.: s.n.], 2007. 1–319 p. ISSN 18732763. ISBN 9780470035801. Citado na página 79.

FORREST, A. R. Interactive interpolation and approximation by Bézier polynomials. **Computer-Aided Design**, v. 22, n. 9, p. 527–537, nov 1990. ISSN 00104485. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/001044859090038E>>. Citado na página 28.

FREDHEIM, O. J. **Isogeometric finite element analysis based on bézier extraction of NURBS and T-splines**. 91 p. Tese (Doutorado) — NTNU- Norwegian University of Science and Technology, 2011. Citado na página 33.

GHORASHI, S. S.; VALIZADEH, N.; MOHAMMADI, S. Extended isogeometric analysis for simulation of stationary and propagating cracks. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 89, n. 9, p. 1069–1101, mar 2012. ISSN 00295981. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/nme.3277>>. Citado na página 33.

GOULD, P. L. **Introduction to Linear Elasticity**. New York, NY: Springer New York, 2013. ISBN 978-1-4614-4832-7. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/978-1-4614-4833-4>>. Citado 2 vezes nas páginas 136 e 137.

HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. 2000. 682 p. Disponível em: <<http://books.google.com/books?id=yarmSc7ULRsC>>. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 79.

HUGHES, T. J. R.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y. **Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement**. 2005. 4135–4195 p. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782504005171>>. Citado 12 vezes nas páginas 25, 30, 35, 42, 48, 49, 50, 52, 53, 54, 124 e 142.

LAI, W. M.; RUBIN, D.; KREMPL, E. Introduction to Continuum Mechanics. **Introduction to Continuum Mechanics**, p. 353–410, 2010. ISSN 0717-6163. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780750685603000062>>. Citado na página 79.

LIU, G. R.; GU, Y. T. **An introduction to meshfree methods and their programming**. [S.l.: s.n.], 2005. 1–479 p. ISSN 09557997. ISBN 1402032285. Citado na página 79.

MALVERN, L. E. **Introduction to the mechanics of a continuous medium**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1969. 713 p. Citado 5 vezes nas páginas 79, 133, 134, 136 e 137.

MOËS, N.; DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. A finite element method for crack growth without remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 46, n. 1, p. 131–150, 1999. ISSN 00295981. Citado na página 33.

NGUYEN, T. N. Dissertação de mestrado, **Isogeometric finite element analysis based on bézier extraction of NURBS and T-Splines**. 2011. 277 p. Citado 7 vezes nas páginas 33, 92, 93, 98, 101, 102 e 124.

NGUYEN-THANH, N. et al. An adaptive three-dimensional RHT-splines formulation in linear elasto-statics and elasto-dynamics. **Computational Mechanics**, v. 53, n. 2, p. 369–385, feb 2014. ISSN 0178-7675. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s00466-013-0914-z>>. Citado na página 33.

NGUYEN-THANH, N. et al. Isogeometric analysis using polynomial splines over hierarchical T-meshes for two-dimensional elastic solids. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 200, n. 21-22, p. 1892–1908, may 2011. ISSN 00457825. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782511000338>>. Citado 3 vezes nas páginas 33, 87 e 125.

NGUYEN-THANH, N. et al. An extended isogeometric thin shell analysis based on Kirchhoff–Love theory. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 284, p. 265–291, feb 2015. ISSN 00457825. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782514003041>>. Citado na página 33.

NGUYEN-THANH, N. et al. Isogeometric analysis of large-deformation thin shells using RHT-splines for multiple-patch coupling. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 316, p. 1157–1178, apr 2017. ISSN 00457825. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782516317406>>. Citado na página 33.

NGUYEN, V. P. et al. Isogeometric analysis: An overview and computer implementation aspects. **Mathematics and Computers in Simulation**, v. 117, p. 89–116, nov 2015. ISSN 03784754. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0378475415001214>>. Citado na página 34.

PIEGL, L.; TILLER, W. **The NURBS Book**. 1996. 665–666 p. Citado 3 vezes nas páginas 28, 35 e 42.

RABUT, C. **On Pierre Bézier's life and motivations**. 2002. 493–510 p. Citado na página 28.

RAUEN, M. **Análise isogeométrica aplicada aos problemas de vibração livre na mecânica das estruturas**. 120 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, 2014. Citado na página 31.

REDDY, J. N. **An introduction to the finite element method**. 3rd. ed. [S.l.]: McGraw-Hill Education (ISE Editions), 2005. 784 p. ISBN 007124473-5. Citado na página 79.

Robert Mcneel & Associados. **Rhino 5 Features**. 2017. 1 p. Disponível em: <<https://www.rhino3d.com/features>>. Citado 3 vezes nas páginas 30, 86 e 160.

ROGERS, D. F. **An introduction to NURBS: with historical perspective**. [S.l.: s.n.], 2001. 344 p. ISSN 1098-6596. ISBN 1558606696. Citado 4 vezes nas páginas 28, 30, 35 e 42.

SCOTT, M. A. et al. Isogeometric finite element data structures based on Bézier extraction of T-splines. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 88, n. 2, p. 126–156, 2011. ISSN 00295981. Citado 9 vezes nas páginas 32, 58, 64, 66, 68, 74, 78, 84 e 124.

SCOTT, M. A. et al. An integrated approach to engineering design and analysis using the Autodesk T-spline plugin for Rhino3d. p. 18, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 74, 165 e 167.

SEDERBERG, T. et al. T-spline simplification and local refinement. **ACM Transactions on Graphics**, v. 23, p. 276, 2004. ISSN 07300301. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 125.

SEDERBERG, T. W. et al. T-splines and T-NURCCs. **ACM Transactions on Graphics**, v. 22, n. 3, p. 477, 2003. ISSN 07300301. Disponível em: <<http://portal.acm.org/citation.cfm?doid=882262.882295>>. Citado 3 vezes nas páginas 30, 32 e 58.

SINGH, I. V.; BHARDWAJ, G.; MISHRA, B. K. A new criterion for modeling multiple discontinuities passing through an element using XIGA. **Journal of Mechanical Science and Technology**, v. 29, n. 3, p. 1131–1143, mar 2015. ISSN 1738-494X. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s12206-015-0225-8>>. Citado na página 33.

SINGH, S. et al. A simple, efficient and accurate Bézier extraction based T-spline XIGA for crack simulations. **Theoretical and Applied Fracture Mechanics**, v. 88, p. 74–96, apr 2017. ISSN 01678442. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167844216302087>>. Citado na página 34.

SZABÓ, B.; BABUŠKA, I. **Introduction to Finite Element Analysis**. [S.l.]: Wiley-Interscience; 1 edition, 1991. 384 p. ISBN 0-471-50273-1. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 79.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. N. **Theory of Elasticity**. 1986. 427–143 p. Disponível em: <<http://www.amazon.com/Elasticity-McGraw-Hill-Classical-Textbook-Reissue/dp/0070858055>>. Citado 4 vezes nas páginas 79, 92, 101 e 142.

Tspline Inc. **T-Spline Forums**. 2011. Disponível em: <<http://www.tsplines.com/forum/>>. Citado na página 160.

XUAN, H. N. **A strain smoothing method in finite elements for structural analysis**. 205 p. Tese (Doutorado) — l'Université de Liège, 2008. Citado na página 110.

ZHANG, Y. et al. Patient-specific vascular NURBS modeling for isogeometric analysis of blood flow. In: **Proceedings of the 15th International Meshing Roundtable, IMR 2006**. [S.l.: s.n.], 2006. p. 73–92. ISBN 354034957X. ISSN 00457825. Citado na página 31.

ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R.; ZHU, J. The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals. **The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals**, p. 493–543, 2013. ISSN 00295981. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9781856176330000150>>. Citado 5 vezes nas páginas 30, 79, 85, 92 e 140.

APÊNDICES

APÊNDICE A – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE ELASTICIDADE LINEAR

A.1 FORMULAÇÃO FORTE DO PROBLEMA

A.1.1 Vetor tensão

Na FIGURA 99a, pode-se observar um corpo contínuo sollicitado por forças externas, chamadas de forças de superfícies, e por forças distribuídas no interior (não representadas), chamadas de forças de corpo.

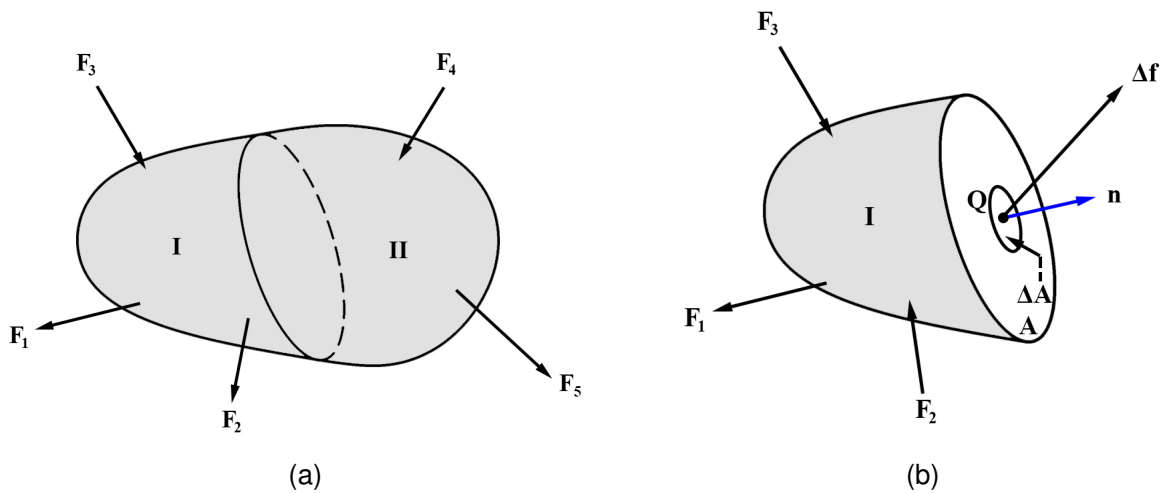


FIGURA 99 – CORPO CONTÍNUO.
FONTE: Adaptado de MALVERN (1969).

Um plano secciona o corpo em duas regiões e na região seccionada I de área A , FIGURA 99b, surgem forças internas distribuídas ao longo de toda a área devido a interação entre as duas partes do corpo. Analisa-se uma pequena área ΔA da parte seccionada I, cuja normal é o vetor unitário \mathbf{n} , onde se tem no ponto P a presença de uma força interna $\Delta \mathbf{f}$, a qual representa a soma de todas as forças distribuídas que atuam na área ΔA . A tensão média nesta área é dada por $\Delta \mathbf{f} / \Delta A$, fazendo a área ΔA tender a um valor muito pequeno, obtém-se o vetor tensão no ponto P, expresso por:

$$\mathbf{t}^{(n)} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta A} \quad (\text{A.1})$$

A fim de se obter uma expressão para $\mathbf{t}^{(n)}$ em um ponto qualquer, destaca-se um diagrama de corpo livre em forma de tetraedro, FIGURA 100, extraído de uma região qualquer do meio contínuo, com origem em P.

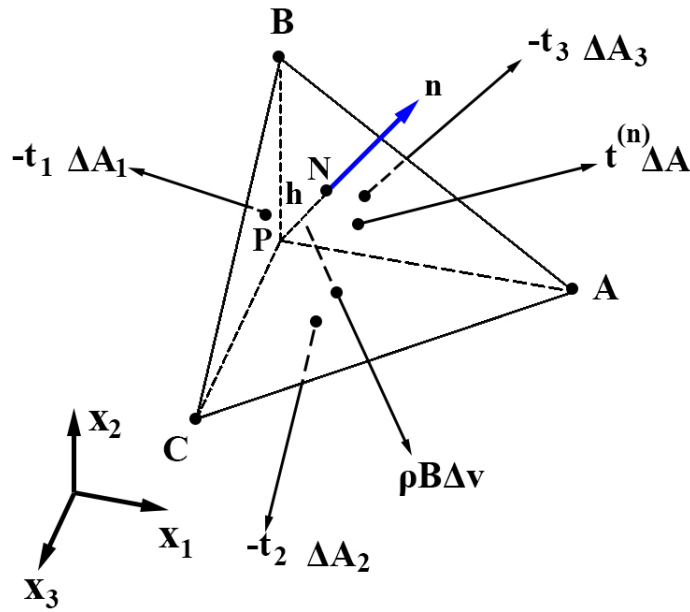


FIGURA 100 – DIAGRAMA DE CORPO LIVRE EM FORMA DE TETRAEDRO.
FONTE: Adaptado de MALVERN (1969).

Considera-se que quando as dimensões do tetraedro tendem a se aproximar de zero, o plano ABC passa pelo ponto P . As componentes do vetor unitário \mathbf{n} , perpendicular ao plano ABC , são os chamados cossenos diretores, expressos por:

$$n_1 = \cos(\angle APN), n_2 = \cos(\angle BPN), n_3 = \cos(\angle CPN) \quad (\text{A.2})$$

sendo \mathbf{n} dado por:

$$\mathbf{n} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3 \quad (\text{A.3})$$

Na FIGURA 100, têm-se quatro vetores representando as resultantes das forças de superfícies em cada uma das quatro faces. A partir da segunda lei de Newton pode-se escrever:

$$\sum \mathbf{F} = -\mathbf{t}_1(\Delta A_1) + -\mathbf{t}_2(\Delta A_2) + -\mathbf{t}_3(\Delta A_3) + \mathbf{t}^{(n)}(\Delta A) = \rho \left(\frac{1}{3} h \Delta A \right) \mathbf{a} \quad (\text{A.4})$$

sendo ρ a massa específica, h o comprimento do segmento \bar{PN} , \mathbf{a} a aceleração, e $\Delta A, \Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3$, as áreas dos planos ABC, PBC, PAC, PBA , respectivamente.

Quando a dimensão h do tetraedro se aproxima de zero, o termo correspondente a aceleração se aproxima de zero muito mais rápido do que os outros termos, assim como

qualquer força de corpo existente, portanto a equação pode ser simplificada da seguinte maneira:

$$\sum \mathbf{F} = -\mathbf{t}_1(\Delta A_1) + -\mathbf{t}_2(\Delta A_2) + -\mathbf{t}_3(\Delta A_3) + \mathbf{t}^{(n)}(\Delta A) = 0 \quad (\text{A.5})$$

Sabendo que as áreas são projeções da área ΔA , tem-se:

$$\Delta A_1 = n_1 \Delta A, \Delta A_2 = n_2 \Delta A, \Delta A_3 = n_3 \Delta A \quad (\text{A.6})$$

Substituindo a equação (A.6) em equação (A.5), a equação A.5 se torna:

$$-\mathbf{t}_1 n_1 + -\mathbf{t}_2 n_2 + -\mathbf{t}_3 n_3 + \mathbf{t}^{(n)} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Rearranjando os termos da equação anterior, obtém-se:

$$\mathbf{t}^{(n)} = n_1 \mathbf{t}_1 + n_2 \mathbf{t}_2 + n_3 \mathbf{t}_3 \quad (\text{A.8})$$

Essa equação permite que seja determinado o vetor tensão \mathbf{t}_n em um ponto, atuando em um plano arbitrário que passe por esse ponto, quando se sabe as tensões atuantes em três planos mutuamente perpendiculares e que também passem por este ponto.

As componentes do vetor $\mathbf{t}^{(n)}$ são dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \sigma_{11} \mathbf{e}_1 + \sigma_{21} \mathbf{e}_2 + \sigma_{31} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}_2 &= \sigma_{12} \mathbf{e}_1 + \sigma_{22} \mathbf{e}_2 + \sigma_{32} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}_3 &= \sigma_{13} \mathbf{e}_1 + \sigma_{23} \mathbf{e}_2 + \sigma_{33} \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Essas componentes, ilustradas na FIGURA 101, podem ser dispostas em um tensor, conhecido como tensor tensão ou tensor tensão de Cauchy, como se segue:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad ou \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

A equação (A.8) pode ser escrita como:

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} \quad ou \quad t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{A.11})$$

Na FIGURA 101, observa-se que na face cujo vetor normal unitário é \mathbf{e}_1 e o vetor tensão \mathbf{t}_1 atua, as componentes do vetor são $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$, na face cujo vetor normal unitário é \mathbf{e}_2 e o vetor tensão \mathbf{t}_2 atua, as componentes do vetor são $\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}$ e na face cujo vetor normal unitário é \mathbf{e}_3 e o vetor tensão \mathbf{t}_3 atua, as componentes do vetor são $\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$.

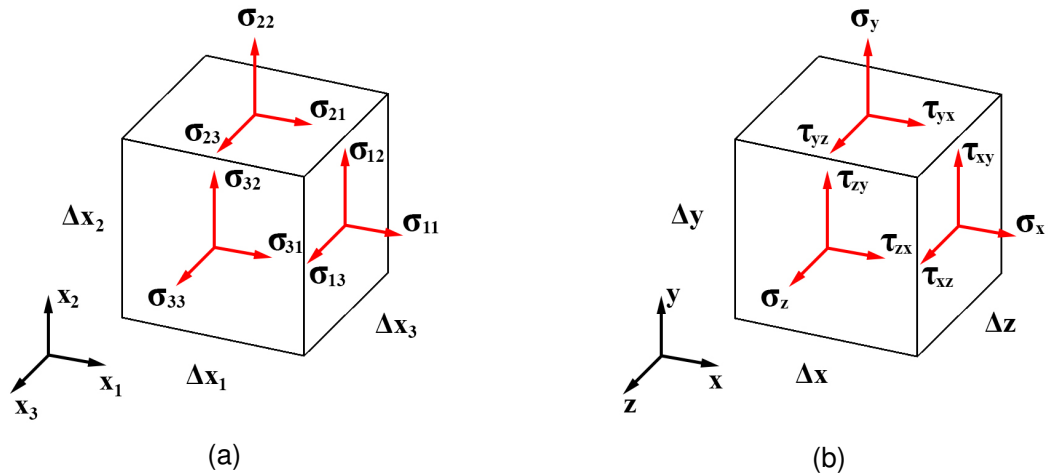


FIGURA 101 – COMPONENTES DE TENSÃO.
FONTE: Adaptado de MALVERN (1969).

A.1.2 Equações de equilíbrio

As equações que governam a distribuição das tensões são conhecidas como as equações de equilíbrio. Essas equações podem ser obtidas pelo princípio de conservação do momento linear e momento angular. A partir do princípio da Conservação do Momento Linear, considera-se que a taxa de variação da mudança do momento linear total de um dado conjunto de partículas é igual a soma de todas as forças externas agindo nas partículas deste conjunto.

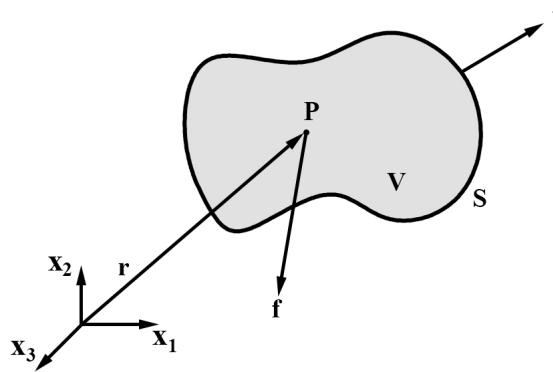


FIGURA 102 – CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR.
FONTE: Adaptado de GOULD (2013).

Considerando a FIGURA 102, na qual pode ser visto uma massa de um meio contínuo, ocupando um volume V e limitada pelo contorno S , sob ação de forças externas e internas, o princípio da Conservação do Momento Linear é expresso por:

$$\int_S \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{f} dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV \quad (\text{A.12})$$

sendo \mathbf{t} o vetor das forças de superfície, \mathbf{f} a força de corpo e \mathbf{v} a velocidade do corpo.

ou em coordenadas retangulares, dadas por:

$$\int_S t_i dS + \int_V f_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.13})$$

substituindo $t_i = \sigma_{ji} n_j$ e utilizando o teorema da divergência para a transformação da integral de superfície, tem-se para o primeiro termo do lado esquerdo da igualdade:

$$\int_S t_i dS = \int_S \sigma_{ji} n_j dS = \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV \quad (\text{A.14})$$

para o termo do lado direito da igualdade, utiliza-se a seguinte relação:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = \int_V \rho \frac{dv_i}{dt} dV \quad (\text{A.15})$$

substituindo a equação (A.14) e a equação (A.15) na equação (A.13), tem-se:

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i \right) dV = \int_V \rho \frac{dv_i}{dt} dV \quad (\text{A.16})$$

rearranjando os termos, obtém-se:

$$\int_V \left[\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i - \rho \frac{dv_i}{dt} \right] dV = 0 \quad (\text{A.17})$$

Para um volume V arbitrário, tem-se para cada ponto:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{dv_i}{dt} \quad \text{ou} \quad \nabla \sigma + \mathbf{f} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (\text{A.18})$$

essas equações são conhecidas como Equações de Movimento de Cauchy.

Para o caso do corpo em equilíbrio estático, $d\mathbf{v}/dt = 0$, a equação (A.18) se torna:

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla \sigma + \mathbf{f} = 0 \quad (\text{A.19})$$

Ainda com base na FIGURA 102, aplica-se o princípio da conservação do momento angular, a partir do qual considera-se que a taxa de mudança do momento angular total de um dado conjunto de partículas é igual a soma dos momentos das forças externas agindo no sistema. Este princípio é expresso por:

$$\int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{t}) dS + \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{f}) dV = \frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) dV \quad (\text{A.20})$$

A partir da equação A.19, como pode ser visto em Malvern (1969) Gould (2013), após algumas manipulações e adotando o equilíbrio estático, a equação A.20 se reduz a:

$$\int_V \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0 \quad (\text{A.21})$$

Para um volume V arbitrário, tem-se:

$$\epsilon_{ijk}\sigma_{jk} = 0 \quad (\text{A.22})$$

onde ϵ_{ijk} é o símbolo de permutação.

Por exemplo, para o índice $i = 1$ a equação (A.22) se torna:

$$\begin{aligned} \epsilon_{111}\sigma_{11} + \epsilon_{121}\sigma_{21} + \epsilon_{131}\sigma_{31} + \epsilon_{112}\sigma_{12} + \epsilon_{122}\sigma_{22} + \epsilon_{132}\sigma_{32} + \epsilon_{113}\sigma_{13} + \epsilon_{123}\sigma_{23} + \epsilon_{133}\sigma_{33} = \\ 0.\sigma_{11} + 0.\sigma_{21} + 0.\sigma_{31} + 0.\sigma_{12} + 0.\sigma_{22} + (-1).\sigma_{32} + 0.\sigma_{13} + (+1).\sigma_{23} + 0.\sigma_{33} = \\ -\sigma_{32} + \sigma_{23} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Portanto, aplicando os índices $i = 1$ e $i = 2$ e $i = 3$ na equação (A.22), obtém-se uma importante relação:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (\text{A.24})$$

Essa relação representa a simetria do tensor tensão, $\sigma = \sigma^T$. Assim, pode-se reescrever a equação (A.19) como:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (\text{A.25})$$

A equação (A.11), retirando-se o sobrescrito referente a normal \mathbf{n} e aplicando-se a equação (A.24) também pode ser reescrita como:

$$t_i = \sigma_{ij}n_j \quad (\text{A.26})$$

Sabe-se da mecânica do contínuo que o tensor σ_{ij} pode ser escrito como:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (\text{A.27})$$

onde D_{ijkl} são os componentes do chamado tensor constitutivo \mathbf{D} e ϵ_{kl} as componentes do tensor de deformações infinitesimais ϵ .

As componentes do tensor ϵ , por sua vez, são obtidas em função dos deslocamentos:

$$\epsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \quad (\text{A.28})$$

A.1.3 Formulação Forte

Pode-se definir a formulação forte (S) do problema de elasticidade linear da seguinte maneira: Dado $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{u}_i : \Gamma_{u_i} \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{t}_i : \Gamma_{t_i} \rightarrow \mathbb{R}$, encontre $u_i : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que,

$$(S) = \begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = 0 & \text{em } \Omega \\ u_i = \bar{u}_i & \text{em } \Gamma_{u_i} \\ \sigma_{ij}n_j = \bar{t}_i & \text{em } \Gamma_{t_i} \end{cases} \quad \begin{matrix} (A.29) \\ (A.30) \\ (A.31) \end{matrix}$$

onde:

Ω representa o domínio;

$\bar{\Omega}$ representa a união do domínio Ω com seu contorno Γ ($\Omega \cup \Gamma$);

Γ_{u_i} o contorno onde são aplicados as condições de Dirichlet;

Γ_{t_i} o contorno onde são aplicados as condições de Neumann;

\bar{u}_i são os deslocamentos prescritos;

\bar{t}_i as componentes da força de superfície por unidade de área;

Um esquema para um corpo bidimensional está ilustrado na FIGURA 103.

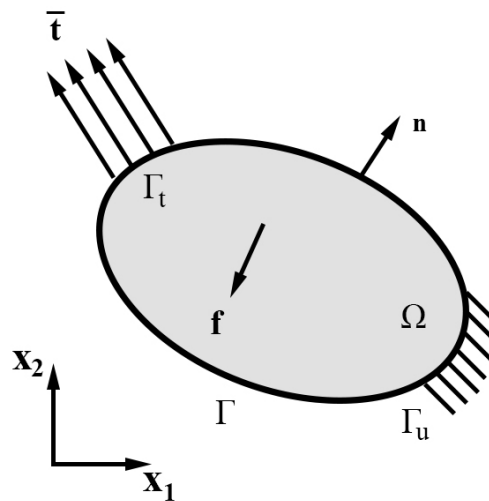


FIGURA 103 – CONDIÇÕES DE CONTORNO E FORÇAS DE CORPO APLICADAS A UM CORPO BIDI-MENSIONAL.

FONTE: O autor (2017).

A.2 FORMULAÇÃO FRACA

Segundo Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2013) a formulação forte do problema de elasticidade linear é aplicável a um problema em um meio contínuo. Uma alternativa à formulação forte é a obtenção da formulação fraca do problema, a qual torna possível a obtenção de soluções aproximadas. A formulação fraca para um conjunto de equações diferenciais pode ser obtida utilizando-se os seguintes passos:

- Multiplica-se cada equação por uma função arbitrária apropriada, também conhecida como função teste;
- Integra-se esse produto sobre o domínio espacial do problema;
- Utiliza-se a integração por partes para reduzir a ordem das derivadas ;
- Introduz-se as condições de contorno;

Utiliza-se, aqui, o método de Galerkin para a obtenção da formulação fraca a partir da formulação forte do problema. Para se definir uma formulação fraca para (S), é necessário a definição de duas classes de funções. A primeira é composta por possíveis soluções, ou soluções tentativas. A coleção das soluções tentativas é denotado por \mathbf{S} . Estas soluções devem satisfazer a condição de contorno $u_i = \bar{u}_i$. A segunda classe de funções é chamada de funções peso. A coleção das funções peso é denotado por \mathbf{V} . Estas funções devem satisfazer o critério $w_i = 0$.

Multiplicando a função peso w_i na equação diferencial equação (A.29) e integrando no domínio, tem-se:

$$\int_{\Omega} w_i \sigma_{ij,j} d\Omega + \int_{\Omega} w_i f_i d\Omega = 0 \quad (\text{A.32})$$

Utiliza-se a integração por partes no primeiro termo do lado esquerdo da equação (A.32) e encontra-se:

$$\int_{\Omega} w_i \sigma_{ij,j} d\Omega = \int_{\Gamma} w_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} w_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega \quad (\text{A.33})$$

Substituindo a equação (A.33) na equação (A.32), tem-se

$$\int_{\Gamma} w_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} w_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} w_i f_i d\Omega = 0 \quad (\text{A.34})$$

Rearranjando os termos da equação anterior, obtém-se:

$$\int_{\Omega} w_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} w_i f_i d\Omega + \int_{\Gamma} w_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma \quad (\text{A.35})$$

Divide-se o contorno Γ em duas partes, onde as condições de contorno de Dirichlet e Neumann, sendo obtido a seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} w_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} w_i f_i d\Omega + \int_{\Gamma_{u_i}} w_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma + \int_{\Gamma_{t_i}} w_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma \quad (\text{A.36})$$

Seja $\mathbf{S} = \{\mathbf{u} | u_i \in S_i\}$, o espaço das soluções tentativas e seja $\mathbf{V} = \{\mathbf{w} | w_i \in V_i\}$, o espaço das funções peso. Sendo que cada membro $u_i \in S_i$ satisfaz $u_i = \bar{u}_i$ em Γ_{u_i} , e cada w_i em V_i satisfaz $w_i = 0$ em Γ_{u_i} . Define-se a formulação fraca (W) da seguinte maneira: Dado $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{u}_i : \Gamma_{u_i} \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{t}_i : \Gamma_{t_i} \rightarrow \mathbb{R}$, encontre $u_i \in S_i$ tal que para todo $w_i \in V_i$,

$$\int_{\Omega} w_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} w_i f_i d\Omega + \int_{\Gamma_{t_i}} w_i \bar{t}_i d\Gamma \quad (\text{A.37})$$

lembrando que $\sigma_{ij} = D_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl}(u)$.

A equação (A.37) também pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{w})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{w}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (\text{A.38})$$

APÊNDICE B – EXEMPLO DE CÁLCULO PELO MÉTODO DA AIG

Para a demonstração do cálculo pelo método da AIG, escolheu-se o problema de uma chapa com furo circular central sob tensão (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005). A configuração do problema pode ser vista na FIGURA 104.

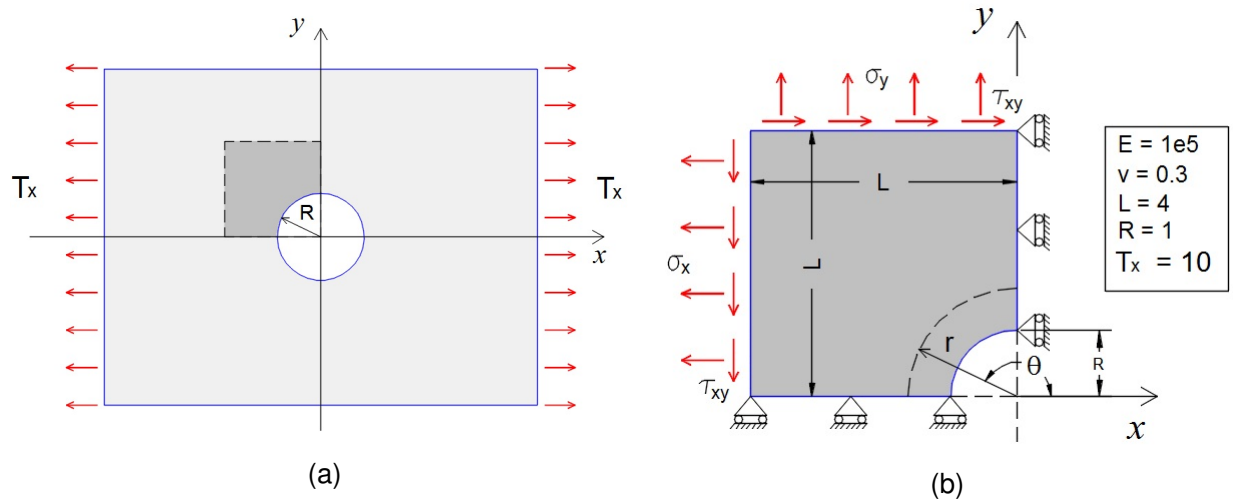


FIGURA 104 – a) CHAPA INFINITA COM FURO CIRCULAR SOB TENSÃO. b) PARTE SIMÉTRICA COM CONDIÇÕES GEOMÉTRICAS E MECÂNICAS DE CONTORNO.

FONTE: O autor (2017).

A solução analítica para o problema apresentado é obtida, em coordenadas polares (TIMOSHENKO; GOODIER, 1986), pelas seguintes expressões:

$$\sigma_r = \frac{T_x}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{T_x}{2} \left(1 + \frac{3R^4}{r^4} - \frac{4R^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \quad (B.1)$$

$$\sigma_\theta = \frac{T_x}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{T_x}{2} \left(1 + \frac{3R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \quad (B.2)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{T_x}{2} \left(1 - \frac{3R^4}{r^4} + \frac{2R^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \quad (B.3)$$

e são transformadas para coordenadas cartesianas através das seguintes expressões:

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta \quad (B.4)$$

$$\sigma_y = \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta + 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta \quad (B.5)$$

$$\tau_{xy} = (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin \theta \cos \theta + \tau_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (B.6)$$

As equações (B.1)-(B.6) também são utilizadas para a obtenção das tensões nas regiões dos contornos da parte simétrica apresentada na FIGURA 104b. Essas tensões são, posteriormente, empregadas no cálculo do vetor de forças de superfície.

Na sequência, apresenta-se um exemplo de cálculo da contribuição de um ponto de Gauss, relativo a integração numérica, para a matriz de rigidez de um elemento. Utiliza-se o método clássico da AIG neste apêndice, ou seja, não é implementado a técnica de extração de Bézier para esse exemplo.

B.1 DADOS

Os dados correspondentes ao problema são:

- Vetores de nós:

$$\Xi = [0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1]$$

$$H = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$$

- Pontos de controle:

TABELA 18 – PONTOS DE CONTROLE

i	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$	$P_{i,3}$
1	$(-1, 0)$	$(-2.5, 0)$	$(-4, 0)$
2	$(-1, \sqrt{2} - 1)$	$(-2.5, 0.75)$	$(-4, 4)$
3	$(1 - \sqrt{2}, 1)$	$(-0.75, 2.5)$	$(-4, 4)$
4	$(0, 1)$	$(0, 2.5)$	$(0, 4)$

FONTE: O autor (2017).

- Pesos Relacionados aos Pontos de Controle:

TABELA 19 – PESOS

i	$w_{i,1}$	$w_{i,2}$	$w_{i,3}$
1	1	1	1
2	$(1 + 1/\sqrt{2})/2$	1	1
3	$(1 + 1/\sqrt{2})/2$	1	1
4	1	1	1

FONTE: O autor (2017).

B.2 DOMÍNIO DE INTEGRAÇÃO

O ponto escolhido para a demonstração dos cálculos é o ponto O , destacado em vermelho na FIGURA 105. Este ponto possui coordenadas, no domínio de integração, $\tilde{\xi}_o = \sqrt{0,6}$ e $\tilde{\eta}_o = \sqrt{0,6}$.

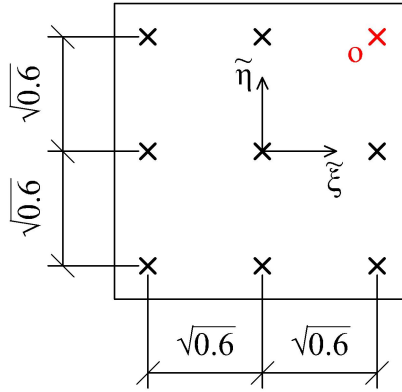


FIGURA 105 – DOMÍNIO DE INTEGRAÇÃO.
FONTE: O autor (2017).

Após a escolha do ponto é necessário a realização do mapeamento afim.

B.3 MAPEAMENTO AFIM

O mapeamento afim do ponto escolhido, isto é, o mapeamento do domínio de integração para o domínio paramétrico, é mostrado na FIGURA 106. Neste exemplo, o elemento 01 é o escolhido para a demonstração dos cálculos.

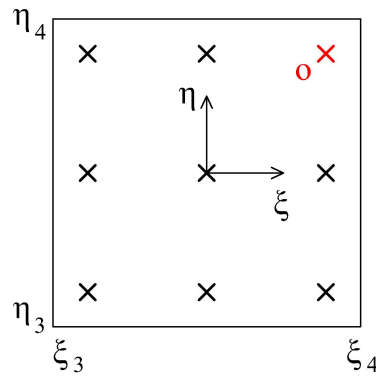


FIGURA 106 – MAPEAMENTO AFIM.
FONTE: O autor (2017).

O mapeamento afim é dado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \xi_o &= \frac{(\xi_{i+1} - \xi_i)\tilde{\xi}_o + (\xi_{i+1} + \xi_i)}{2} = \frac{(\xi_4 - \xi_3)\tilde{\xi}_o + (\xi_4 + \xi_3)}{2} \\ &= \frac{(0,5 - 0,0)\sqrt{0,6} + (0,5 + 0,0)}{2} \rightarrow \xi_o = 0,4436492 \end{aligned} \quad (B.7)$$

$$\begin{aligned}\eta_o &= \frac{(\eta_{i+1} - \eta_i)\tilde{\eta}_o + (\eta_{i+1} + \eta_i)}{2} = \frac{(\eta_4 - \eta_3)\tilde{\eta}_o + (\eta_4 + \eta_3)}{2} \\ &= \frac{(1, 0 - 0, 0)\sqrt{0,6} + (1, 0 + 0, 0)}{2} \rightarrow \eta_o = 0,8872983\end{aligned}\quad (B.8)$$

Tem-se, portanto, as coordenadas $\tilde{\xi}_o = \sqrt{0,6}$ e $\tilde{\eta}_o = \sqrt{0,6}$, do domínio de integração, mapeadas no domínio paramétrico, que são dadas por $\xi_o = 0,4436492$ e $\eta_o = 0,8872983$.

Após a obtenção das coordenadas no domínio paramétrico, pode-se validar as funções B-splines e sua derivadas nesses pontos.

B.4 FUNÇÕES BASE B-SPLINES E DERIVADAS

Considerando os *knot spans*, $[\xi_3, \xi_4)$ e $[\eta_3, \eta_4)$, referentes ao elemento 01, e sendo o grau das funções $p = 2$ e $q = 2$, contrói-se o esquema de dependência das funções B-splines, apresentado na FIGURA 107, para o cálculo das funções que possuem suporte nesses *knot spans*.

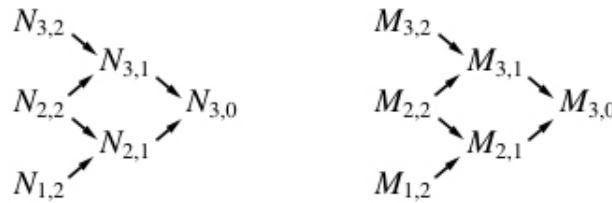


FIGURA 107 – ESQUEMA DE DEPENDÊNCIA DAS FUNÇÕES B-SPLINES.
FONTE: O autor (2017).

Utilizam-se as equações (3.1) e (3.2) para o cálculo das funções B-spline, que são repetidas a seguir.

Para o grau zero, tem-se:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{para os demais casos} \end{cases} \quad (B.9)$$

e segue-se na sequência, para os graus $p = 1, 2, 3, \dots$, cujas funções são definidas por:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (B.10)$$

Para o exemplo em questão, tem-se:

$$N_{3,0} = 1,0 \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} N_{2,1} &= \frac{\xi - \xi_2}{\xi_3 - \xi_2} N_{2,0} + \frac{\xi_4 - \xi}{\xi_4 - \xi_3} N_{3,0} = \frac{\xi - 0,0}{0,0 - 0,0} 0,0 + \frac{0,5 - \xi}{0,5 - 0,0} 1,0 \\ &\Rightarrow N_{2,1} = \frac{0,5 - \xi}{0,5} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} N_{3,1} &= \frac{\xi - \xi_3}{\xi_4 - \xi_3} N_{3,0} + \frac{\xi_5 - \xi}{\xi_5 - \xi_4} N_{4,0} = \frac{\xi - 0,0}{0,5 - 0,0} 1,0 + \frac{0,5 - \xi}{1,0 - 0,5} 0,0 \\ &\Rightarrow N_{3,1} = \frac{\xi}{0,5} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} N_{1,2} &= \frac{\xi - \xi_1}{\xi_3 - \xi_1} N_{1,1} + \frac{\xi_4 - \xi}{\xi_4 - \xi_2} N_{2,1} = \frac{\xi - 0,0}{0,0 - 0,0} 0,0 + \frac{0,5 - \xi}{0,5 - 0,0} \left(\frac{0,5 - \xi}{0,5} \right) \\ &\Rightarrow N_{1,2} = \frac{0,25 - \xi + \xi^2}{0,25} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} N_{2,2} &= \frac{\xi - \xi_2}{\xi_4 - \xi_2} N_{2,1} + \frac{\xi_5 - \xi}{\xi_5 - \xi_3} N_{3,1} = \frac{\xi - 0,0}{0,5 - 0,0} \left(\frac{0,5 - \xi}{0,5} \right) + \frac{1,0 - \xi}{1,0 - 0,0} \left(\frac{\xi}{0,5} \right) \\ &\Rightarrow N_{2,2} = \frac{0,5\xi - \xi^2}{0,25} + \frac{\xi - \xi^2}{0,5} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} N_{3,2} &= \frac{\xi - \xi_3}{\xi_5 - \xi_3} N_{3,1} + \frac{\xi_6 - \xi}{\xi_6 - \xi_4} N_{4,1} = \frac{\xi - 0,0}{1,0 - 0,0} \left(\frac{\xi}{0,5} \right) + \frac{1,0 - \xi}{1,0 - 0,5} 0,0 \\ &\Rightarrow N_{3,2} = \frac{\xi^2}{0,5} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$M_{3,0} = 1,0 \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned} M_{2,1} &= \frac{\eta - \eta_2}{\eta_3 - \eta_2} M_{2,0} + \frac{\eta_4 - \eta}{\eta_4 - \eta_3} M_{3,0} = \frac{\eta - 0,0}{0,0 - 0,0} 0,0 + \frac{1,0 - \eta}{1,0 - 0,0} 1,0 \\ &\Rightarrow M_{2,1} = 1,0 - \eta \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} M_{3,1} &= \frac{\eta - \eta_3}{\eta_4 - \eta_3} M_{3,0} + \frac{\eta_5 - \eta}{\eta_5 - \eta_4} M_{4,0} = \frac{\eta - 0,0}{1,0 - 0,0} 1,0 + \frac{0,5 - \eta}{1,0 - 1,0} 0,0 \\ &\Rightarrow M_{3,1} = \eta \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$M_{1,2} = \frac{\eta - \eta_1}{\eta_3 - \eta_1} M_{1,1} + \frac{\eta_4 - \eta}{\eta_4 - \eta_2} M_{2,1} = \frac{\eta - 0,0}{0,0 - 0,0} 0,0 + \frac{1,0 - \eta}{1,0 - 0,0} (1 - \eta) \quad (\text{B.20})$$

$$\Rightarrow M_{1,2} = (1 - \eta)^2$$

$$M_{2,2} = \frac{\eta - \eta_2}{\eta_4 - \eta_2} M_{2,1} + \frac{\eta_5 - \eta}{\eta_5 - \eta_3} M_{3,1} = \frac{\eta - 0,0}{1,0 - 0,0} (1,0 - \eta) + \frac{1,0 - \eta}{1,0 - 0,0} \eta \quad (\text{B.21})$$

$$\Rightarrow M_{2,2} = 2\eta - 2\eta^2$$

$$M_{3,2} = \frac{\eta - \eta_3}{\eta_5 - \eta_3} M_{3,1} + \frac{\eta_6 - \eta}{\eta_6 - \eta_4} M_{4,1} = \frac{\eta - 0,0}{1,0 - 0,0} \eta + \frac{1,0 - \eta}{1,0 - 1,0} 0,0 \quad (\text{B.22})$$

$$\Rightarrow M_{3,2} = \eta^2$$

Com base nas equações obtidas anteriormente e analisando apenas as funções de grau dois, obtém-se as derivadas de primeira ordem em relação as coordenadas paramétricas

$$N'_{1,2} = \frac{dN_{1,2}}{d\xi} = -4 + 8\xi \quad (\text{B.23})$$

$$N'_{2,2} = \frac{dN_{2,2}}{d\xi} = 4 - 12\xi \quad (\text{B.24})$$

$$N'_{3,2} = \frac{dN_{3,2}}{d\xi} = 4\xi \quad (\text{B.25})$$

$$M'_{1,2} = \frac{dM_{1,2}}{d\eta} = -2 + 2\eta \quad (\text{B.26})$$

$$M'_{2,2} = \frac{dM_{2,2}}{d\eta} = 2 - 4\eta \quad (\text{B.27})$$

$$M'_{3,2} = \frac{dM_{3,2}}{d\eta} = 2\eta \quad (\text{B.28})$$

Nas TABELAS 20 e 21 estão resumidas as funções B-splines e suas derivadas de primeira ordem, validadas nos pontos $\xi_o = 0,4436492$ e $\eta_o = 0,8872983$.

TABELA 20 – FUNÇÕES E DERIVADAS CALCULADAS PARA ξ_o

$N_{1,2}(\xi_o)$	0,0127017	$N'_{1,2}(\xi_o)$	-0,4508067
$N_{2,2}(\xi_o)$	0,5936492	$N'_{2,2}(\xi_o)$	-1,3237900
$N_{3,2}(\xi_o)$	0,3936492	$N'_{3,2}(\xi_o)$	1,7745967

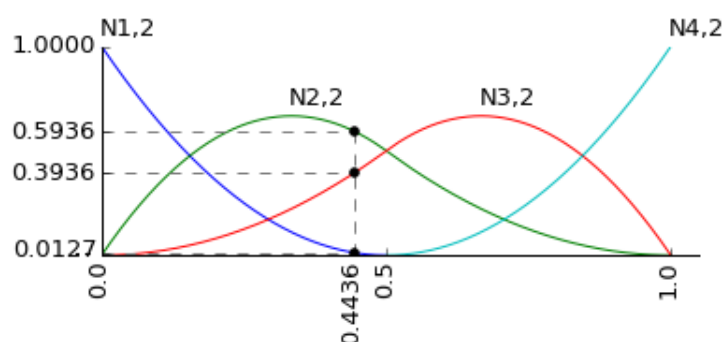
FONTE: O autor (2017).

TABELA 21 – FUNÇÕES E DERIVADAS CALCULADAS PARA η_o

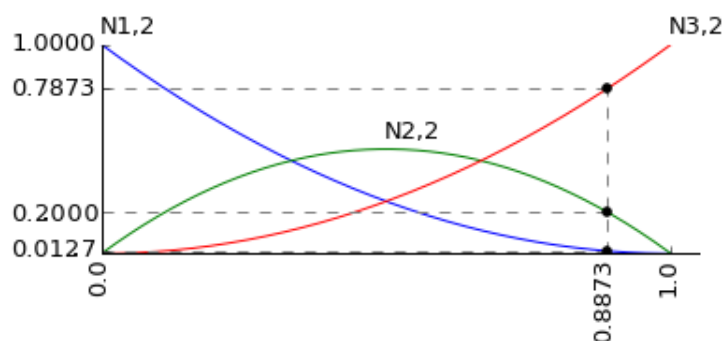
$M_{1,2}(\eta_o)$	0,0127017	$M'_{1,2}(\eta_o)$	-0,2254033
$M_{2,2}(\eta_o)$	0,2000000	$M'_{2,2}(\eta_o)$	-1,5491933
$M_{3,2}(\eta_o)$	0,7872983	$M'_{3,2}(\eta_o)$	1,7745967

FONTE: O autor (2017).

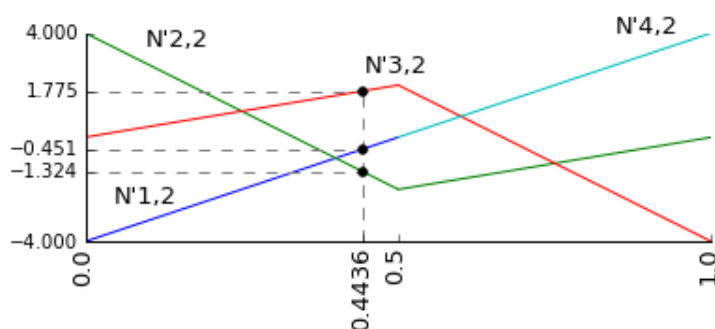
As funções B-splines e suas derivadas podem ser observadas nas FIGURAS 108-111.

FIGURA 108 – FUNÇÕES B-SPLINES NA DIREÇÃO ξ .

FONTE: O autor (2017).

FIGURA 109 – FUNÇÕES B-SPLINES NA DIREÇÃO η .

FONTE: O autor (2017).

FIGURA 110 – DERIVADAS DAS FUNÇÕES B-SPLINES COM RESPEITO A ξ .

FONTE: O autor (2017).

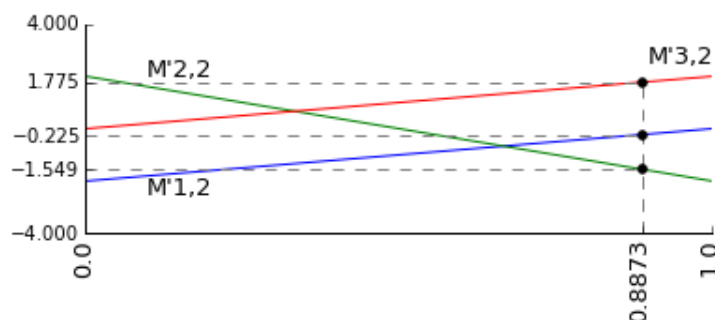


FIGURA 111 – DERIVADAS DAS FUNÇÕES B-SPLINES COM RESPEITO A η .
FONTE: O autor (2017).

Com o objetivo de simplificar a apresentação dos cálculos, e sabendo que todas as funções são quadráticas, a partir das próximas seções a simbologia de algumas variáveis são alteradas, como por exemplo: $R_{i,j}^{p,q} = R_{ij}$, $N_{i,p} = N_i$, $w_{i,j} = w_{ij}$.

B.5 FUNÇÕES NURBS

Utiliza-se a equação (3.10) para o cálculo das funções NURBS, repetida a seguir.

$$R_{ij}(\xi, \eta) = \frac{N_i(\xi)M_j(\eta)w_{ij}}{W(\xi, \eta)} \quad (\text{B.29})$$

Substituindo os valores de ξ_o e η_o no denominador, tem-se:

$$W(\xi_o, \eta_o) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 N_i(\xi_o)M_j(\eta_o)w_{ij} = 0,9981635 \quad (\text{B.30})$$

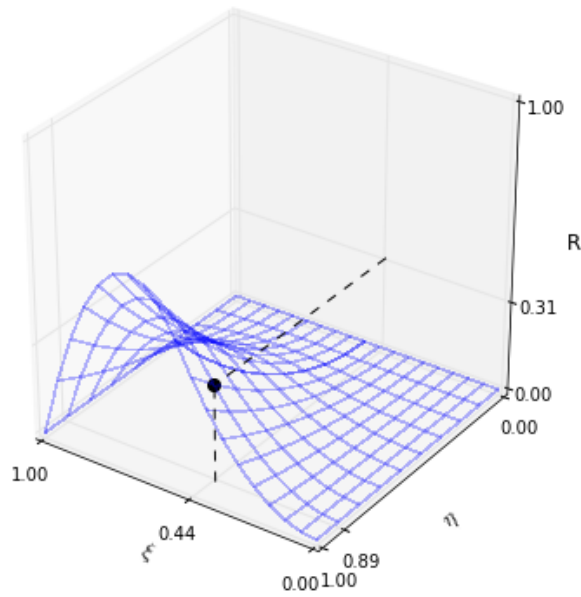
Calculando-se as funções NURBS que possuem suporte no elemento 01 e as validando para ξ_o e η_o , tem-se os valores apresentados na TABELA 22.

TABELA 22 – FUNÇÕES NURBS

$R_{11}(\xi_o, \eta_o)$	0,0001616
$R_{12}(\xi_o, \eta_o)$	0,0025450
$R_{13}(\xi_o, \eta_o)$	0,0100184
$R_{21}(\xi_o, \eta_o)$	0,0064479
$R_{22}(\xi_o, \eta_o)$	0,1189483
$R_{23}(\xi_o, \eta_o)$	0,4682389
$R_{31}(\xi_o, \eta_o)$	0,0042756
$R_{32}(\xi_o, \eta_o)$	0,0788747
$R_{33}(\xi_o, \eta_o)$	0,3104895

FONTE: O autor (2017).

Na FIGURA 112 pode ser visto, como exemplo, a função R_{33} plotada no domínio paramétrico.

FIGURA 112 – FUNÇÃO NURBS R_{33} .

FONTE: O autor (2017).

B.6 DERIVADAS DAS FUNÇÕES NURBS COM RESPEITO ÀS COORDENADAS PARAMÉTRICAS

Utilizam-se as equações (3.14)-(3.17) para o cálculo das derivadas das funções NURBS com respeito às coordenadas paramétricas, as quais são repetidas a seguir.

$$\frac{\partial}{\partial \xi} R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = w_{i,j} M_{j,q}(\eta) \frac{W(\xi, \eta) N'_{i,p}(\xi) - W(\xi, \eta)_{,\xi} N_{i,p}(\xi)}{(W(\xi, \eta))^2} \quad (\text{B.31})$$

$$W(\xi, \eta)_{,\xi} = \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N'_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}} \quad (\text{B.32})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = w_{i,j} N_{i,p}(\xi) \frac{W(\xi, \eta) M'_{j,q}(\eta) - W(\xi, \eta)_{,\eta} M_{j,q}(\eta)}{(W(\xi, \eta))^2} \quad (\text{B.33})$$

$$W(\xi, \eta)_{,\eta} = \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi) M'_{\hat{j},q}(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}} \quad (\text{B.34})$$

Substituindo os valores obtidos anteriormente para os pontos ξ_o e η_o , obtém-se os seguintes valores para as derivadas das funções peso:

$$W(\xi_o, \eta_o)_{,\xi} = \sum_{\hat{i}=1}^4 \sum_{\hat{j}=1}^3 N'_{\hat{i}}(\xi_o) M_{\hat{j}}(\eta_o) w_{\hat{i}\hat{j}} = -0,0008386 \quad (\text{B.35})$$

$$W(\xi_o, \eta_o)_{,\eta} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 N_i(\xi_o) M'_j(\eta_o) w_{ij} = 0,0325903 \quad (\text{B.36})$$

Na sequência, calculam-se as derivadas das funções NURBS, que possuem suporte no elemento 01, com respeito a ξ e a η . Os valores das derivadas se encontram resumidos nas TABELAS 23 e 24.

TABELA 23 – DERIVADAS DAS FUNÇÕES NURBS COM RESPEITO A ξ

$R_{11,\xi}(\xi_o, \eta_o)$	-0,0057364
$R_{12,\xi}(\xi_o, \eta_o)$	-0,0903251
$R_{13,\xi}(\xi_o, \eta_o)$	-0,3555639
$R_{21,\xi}(\xi_o, \eta_o)$	-0,0143729
$R_{22,\xi}(\xi_o, \eta_o)$	-0,2651452
$R_{23,\xi}(\xi_o, \eta_o)$	-1,0437418
$R_{31,\xi}(\xi_o, \eta_o)$	0,0192784
$R_{32,\xi}(\xi_o, \eta_o)$	0,3556386
$R_{33,\xi}(\xi_o, \eta_o)$	1,3999684

FONTE: O autor (2017).

TABELA 24 – DERIVADAS DAS FUNÇÕES NURBS COM RESPEITO A η

$R_{11,\eta}(\xi_o, \eta_o)$	-0,0028735
$R_{12,\eta}(\xi_o, \eta_o)$	-0,0197966
$R_{13,\eta}(\xi_o, \eta_o)$	0,0222547
$R_{21,\eta}(\xi_o, \eta_o)$	-0,1146351
$R_{22,\eta}(\xi_o, \eta_o)$	-0,9252531
$R_{23,\eta}(\xi_o, \eta_o)$	1,0401380
$R_{31,\eta}(\xi_o, \eta_o)$	-0,0760146
$R_{32,\eta}(\xi_o, \eta_o)$	-0,6135360
$R_{33,\eta}(\xi_o, \eta_o)$	0,6897162

FONTE: O autor (2017).

B.7 DERIVADAS DAS FUNÇÕES NURBS COM RESPEITO ÀS COORDENADAS DO ESPAÇO FÍSICO

Para a obtenção das derivadas das funções NURBS em relação as coordenadas do espaço físico é necessário que, primeiramente, seja calculada a matriz jacobiana $\mathbf{J}_{\mathbf{x},\xi}$, relativa ao mapeamento do espaço paramétrico ao espaço físico, dada pela equação (4.25) que é repetida a seguir:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x},\xi} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (\text{B.37})$$

Validando as componentes da matriz $\mathbf{J}_{\mathbf{x},\xi}$ nos pontos ξ_o e η_o , tem-se:

$$x_{,\xi}(\xi_o, \eta_o) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 R_{ij,\xi}(\xi_o, \eta_o) x_{ij} = 0,6314206 \quad (\text{B.38})$$

$$y_{,\xi}(\xi_o, \eta_o) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 R_{ij,\xi}(\xi_o, \eta_o) y_{ij} = 2,1284682 \quad (\text{B.39})$$

$$x_{,\eta}(\xi_o, \eta_o) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 R_{ij,\eta}(\xi_o, \eta_o) x_{ij} = -4,0366633 \quad (\text{B.40})$$

$$y_{,\eta}(\xi_o, \eta_o) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 R_{ij,\eta}(\xi_o, \eta_o) y_{ij} = 4,5681377 \quad (\text{B.41})$$

Dessa maneira é obtida a matriz Jacobiana $\mathbf{J}_{\mathbf{x},\xi}$,

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x},\xi} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6314206 & -4,0366633 \\ 2,1284682 & 4,5681377 \end{bmatrix} \quad (\text{B.42})$$

Calculando-se a inversa da matriz Jacobiana $\mathbf{J}_{\mathbf{x},\xi}$, tem-se:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x},\xi}^{-1} = \begin{bmatrix} \xi_{,x} & \xi_{,y} \\ \eta_{,x} & \eta_{,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3980488 & 0,3517383 \\ -0,1854660 & 0,0550194 \end{bmatrix} \quad (\text{B.43})$$

O cálculo das derivadas das funções NURBS com respeito às coordenadas do espaço físico é dado pelas equações (4.36) e (4.37) que são repetidas a seguir:

$$R_{ij,x} = R_{ij,\xi} \xi_{,x} + R_{ij,\eta} \eta_{,x} \quad (\text{B.44})$$

$$R_{ij,y} = R_{ij,\xi} \xi_{,y} + R_{ij,\eta} \eta_{,y} \quad (\text{B.45})$$

Na sequência, calculam-se as derivadas das funções que possuem suporte no elemento 01, validas em ξ_o e η_o , as quais estão resumidas nas TABELAS 25 e 26:

TABELA 25 – DERIVADAS DAS FUNÇÕES NURBS EM RELAÇÃO A X

$R_{11,x}(\xi_o, \eta_o)$	-0,0017504
$R_{12,x}(\xi_o, \eta_o)$	-0,0322822
$R_{13,x}(\xi_o, \eta_o)$	-0,1456593
$R_{21,x}(\xi_o, \eta_o)$	0,0155398
$R_{22,x}(\xi_o, \eta_o)$	0,0660623
$R_{23,x}(\xi_o, \eta_o)$	-0,6083704
$R_{31,x}(\xi_o, \eta_o)$	0,0217719
$R_{32,x}(\xi_o, \eta_o)$	0,2553516
$R_{33,x}(\xi_o, \eta_o)$	0,4293368

FONTE: O autor (2017).

TABELA 26 – DERIVADAS DAS FUNÇÕES NURBS EM RELAÇÃO A Y

$R_{11,y}(\xi_o, \eta_o)$	-0,0021758
$R_{12,y}(\xi_o, \eta_o)$	-0,0328600
$R_{13,y}(\xi_o, \eta_o)$	-0,1238410
$R_{21,y}(\xi_o, \eta_o)$	-0,0113627
$R_{22,y}(\xi_o, \eta_o)$	-0,1441685
$R_{23,y}(\xi_o, \eta_o)$	-0,3098963
$R_{31,y}(\xi_o, \eta_o)$	0,0025987
$R_{32,y}(\xi_o, \eta_o)$	0,0913354
$R_{33,y}(\xi_o, \eta_o)$	0,5303702

FONTE: O autor (2017).

B.8 JACOBIANO

Devido ao fato da ocorrência de dois mapeamentos, o primeiro sendo do domínio de integração para o espaço paramétrico e o segundo sendo do espaço paramétrico para o espaço físico, a matriz jacobiana que representa o mapeamento direto do domínio de integração para o espaço físico é obtida com o uso da regra da cadeia. A matriz Jacobiana, denominada como **J**, referente a este mapeamento direto é dada anteriormente pela equação (4.32) e repetida a seguir:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{x,\xi} \mathbf{J}_{\xi,\tilde{\xi}} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{,\tilde{\xi}} & 0,0 \\ 0,0 & \eta_{,\tilde{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} \xi_{,\tilde{\xi}} & x_{,\eta} \eta_{,\tilde{\eta}} \\ y_{,\xi} \xi_{,\tilde{\xi}} & y_{,\eta} \eta_{,\tilde{\eta}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.46})$$

As componentes da matriz $\mathbf{J}_{\xi,\tilde{\xi}}$, para o exemplo, são obtidas a partir das seguintes expressões:

$$\xi_{,\tilde{\xi}} = \frac{d\xi}{d\tilde{\xi}} = \frac{(\xi_{i+1} - \xi_i)}{2} = \frac{(\xi_4 - \xi_3)}{2} = \frac{(0,5 - 0,0)}{2} = 0,25 \quad (\text{B.47})$$

$$\eta_{,\tilde{\eta}} = \frac{d\eta}{d\tilde{\eta}} = \frac{(\eta_{j+1} - \eta_j)}{2} = \frac{(\eta_4 - \eta_3)}{2} = \frac{(1,0 - 0,0)}{2} = 0,50 \quad (\text{B.48})$$

Portanto, a matriz Jacobiana **J** para o exemplo é dada por:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\mathbf{x},\xi} \mathbf{J}_{\xi,\tilde{\xi}} = \begin{bmatrix} 0,6314206 & -4,0366633 \\ 2,1284682 & 4,5681377 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,25 & 0,0 \\ 0,0 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1578550 & -2,0183322 \\ 0,5321172 & 2,2840696 \end{bmatrix} \quad (\text{B.49})$$

E o Jacobiano é obtido da seguinte maneira:

$$J = |\mathbf{J}| = 1,4345412 \quad (\text{B.50})$$

B.9 MATRIZ DE RIGIDEZ

A matriz de rigidez para o elemento 01, com o uso da integração numérica, é calculada a partir da seguinte expressão:

$$\mathbf{K}^1 = \sum_{l=1}^{ngp_{\xi}} \sum_{m=1}^{ngp_{\eta}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} J w_{gp_{\xi}} w_{gp_{\eta}} \quad (\text{B.51})$$

Para o exemplo estudado, apresenta-se apenas o cálculo da contribuição relativa aos pontos ξ_o e η_o , dada por:

$$\mathbf{K}^1(\xi_o, \eta_o) = \mathbf{B}(\xi_o, \eta_o)^T \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi_o, \eta_o) |\mathbf{J}(\xi_o, \eta_o)| w_{gp_{\xi}}(\xi_o, \eta_o) w_{gp_{\eta}}(\xi_o, \eta_o) \quad (\text{B.52})$$

A matriz **B** é calculada levando-se em consideração todas as funções que possuem suporte no elemento 01, como apresentado abaixo, com base na numeração local das funções:

$$\mathbf{B}(\xi_o, \eta_o) = \begin{bmatrix} R_{1,x} & 0 & R_{2,x} & 0 & R_{3,x} & 0 & R_{4,x} & 0 & R_{5,x} & 0 & R_{6,x} & 0 & R_{7,x} & 0 & R_{8,x} & 0 & R_{9,x} & 0 \\ 0 & R_{1,y} & 0 & R_{2,y} & 0 & R_{3,y} & 0 & R_{4,y} & 0 & R_{5,y} & 0 & R_{6,y} & 0 & R_{7,y} & 0 & R_{8,y} & 0 & R_{9,y} \\ R_{1,y} & R_{1,x} & R_{2,y} & R_{2,x} & R_{3,y} & R_{3,x} & R_{4,y} & R_{4,x} & R_{5,y} & R_{5,x} & R_{6,y} & R_{6,x} & R_{7,y} & R_{7,x} & R_{8,y} & R_{8,x} & R_{9,y} & R_{9,x} \end{bmatrix} \quad (\text{B.53})$$

A entre a numeração das funções, a numeração local e a numeração global está apresentada na TABELA 27 e também ilustrada na FIGURA 113.

TABELA 27 – RELAÇÃO ENTRE A NUMERAÇÃO GLOBAL E LOCAL DAS FUNÇÕES.

R_a	R_A	R_{ij}	
a	A	i	j
1	11	3	3
2	10	2	3
3	9	1	3
4	7	3	2
5	6	2	2
6	5	1	2
7	3	3	1
8	2	2	1
9	1	1	1

FONTE: O autor
(2017).

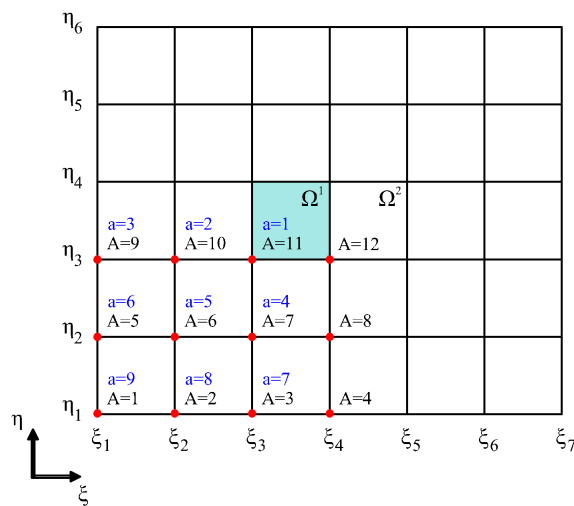


FIGURA 113 – RELAÇÃO ENTRE A NUMERAÇÃO GLOBAL E A NUMERAÇÃO LOCAL DAS FUNÇÕES PARA O ELEMENTO 01.

FONTE: O autor (2017).

A matriz \mathbf{D} é calculada para a condição do estado plano de tensões. Considerando-se os parâmetros $E = 10^5$ e $\nu = 0,3$, tem-se:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 109890,1098901 & 32967,0329670 & 0,0000000 \\ 32967,0329670 & 109890,1098901 & 0,0000000 \\ 0,0000000 & 0,0000000 & 38461,5384615 \end{bmatrix} \quad (\text{B.54})$$

Os pesos relativos a ξ_o e η_o para a quadratura de Gauss são:

$$w_{gp\xi}(\xi_o, \eta_o) = 0,5555556, \quad w_{gp\eta}(\xi_o, \eta_o) = 0,5555556 \quad (\text{B.55})$$

Portanto, a contribuição $\mathbf{K}^1(\xi_o, \eta_o)$ para a matriz global \mathbf{K}^1 é dada por:

$$\mathbf{K}^1(\xi_o, \eta_o) = \begin{bmatrix} 13758,757 & 7201,406 & -15507,376 & -7436,732 & -4161,233 & -2091,651 & 6159,048 & 2878,662 & 77,897 & -306,816 & -971,138 & -497,493 & 478,270 & 212,924 & 221,991 & 69,145 & -56,217 & -29,445 \\ 7201,406 & 16825,261 & -6975,455 & -12444,868 & -2033,061 & -4260,685 & 2644,590 & 4223,864 & -542,632 & -3237,286 & -490,162 & -1083,979 & 187,547 & 226,239 & 37,226 & -179,599 & -29,459 & -68,945 \\ -15507,376 & -6975,455 & 19643,300 & 5962,445 & 4965,089 & 1868,402 & -8040,462 & -2158,628 & -1194,637 & 931,596 & 1128,971 & 462,161 & -658,165 & -137,973 & -400,017 & 18,893 & 63,295 & 28,559 \\ -7436,732 & -12444,868 & 5962,445 & 10975,368 & 1941,876 & 3376,312 & -2101,296 & -4022,613 & 1194,771 & 1489,360 & 486,457 & 829,908 & -125,405 & -264,741 & 47,425 & 10,333 & 30,459 & 50,941 \\ -4161,233 & -2033,061 & 4965,089 & 1941,876 & 1293,463 & 570,483 & -2002,305 & -732,704 & -164,146 & 167,199 & 298,084 & 137,944 & -159,778 & -51,440 & -86,168 & -8,614 & 16,994 & 8,318 \\ -2091,651 & -4260,685 & 1868,402 & 3376,312 & 570,483 & 1107,503 & -688,138 & -1183,729 & 238,188 & 704,819 & 139,863 & 278,072 & -45,802 & -69,662 & 0,094 & 29,920 & 8,561 & 17,452 \\ 6159,048 & 2644,590 & -8040,462 & -2101,296 & -2002,305 & -688,138 & 3314,575 & 737,594 & 596,529 & -434,598 & -452,187 & -172,688 & 274,538 & 43,549 & 175,395 & -18,181 & -25,132 & -10,832 \\ 2878,662 & 4223,864 & -2158,628 & -4022,613 & -732,704 & -1183,729 & 737,594 & 1516,267 & -538,835 & -353,405 & -185,927 & -286,404 & 40,326 & 106,222 & -28,693 & 17,079 & -11,795 & -17,281 \\ 77,897 & -542,632 & -1194,637 & 1194,771 & -164,146 & 238,188 & 596,529 & -538,835 & 566,286 & -301,206 & -23,089 & 47,569 & 63,600 & -50,946 & 77,845 & -49,108 & -0,285 & 2,199 \\ -306,816 & -3237,286 & 931,596 & 1489,360 & 167,199 & 704,819 & -434,598 & -353,405 & -301,206 & 1085,590 & 30,966 & 194,180 & -42,892 & 6,265 & -45,484 & 97,185 & 1,236 & 13,293 \\ -971,138 & -490,162 & 1128,971 & 486,457 & 298,084 & 139,863 & -452,187 & -185,927 & -23,089 & 30,966 & 69,093 & 33,548 & -35,651 & -13,408 & -18,050 & -3,342 & 3,967 & 2,005 \\ -497,493 & -1083,979 & 462,161 & 829,908 & 137,944 & 278,072 & -172,688 & -286,404 & 47,569 & 194,180 & 33,548 & 70,283 & -11,871 & -16,124 & -1,207 & 9,624 & 2,036 & 4,441 \\ 478,270 & 187,547 & -658,165 & -125,405 & -159,778 & -45,802 & 274,538 & 40,326 & 63,600 & -42,892 & -35,651 & -11,871 & 23,178 & 1,789 & 15,959 & -2,923 & -1,951 & -0,769 \\ 212,924 & 226,239 & -137,973 & -264,741 & -51,440 & -69,662 & 43,549 & 106,222 & -50,946 & 6,265 & -13,408 & -16,124 & 1,789 & 8,401 & -3,623 & 4,325 & -0,873 & -0,924 \\ 221,991 & 37,226 & -400,017 & 47,425 & -86,168 & 0,094 & 175,395 & -28,693 & 77,845 & -45,484 & -18,050 & -1,207 & 15,959 & -3,623 & 13,948 & -5,584 & -0,902 & -0,155 \\ 69,145 & -179,599 & 18,893 & 10,333 & -8,614 & 29,920 & -18,181 & 17,079 & -49,108 & 97,185 & -3,342 & 9,624 & -2,923 & 4,325 & -5,584 & 10,394 & -0,285 & 0,740 \\ -56,217 & -29,459 & 63,295 & 30,459 & 16,994 & 8,561 & -25,132 & -11,795 & -0,285 & 1,236 & 3,967 & 2,036 & -1,951 & -0,873 & -0,902 & -0,285 & 0,230 & 0,120 \\ -29,445 & -68,945 & 28,559 & 50,941 & 8,318 & 17,452 & -10,832 & -17,281 & 2,199 & 13,293 & 2,005 & 4,441 & -0,769 & -0,924 & -0,155 & 0,740 & 0,120 & 0,283 \end{bmatrix}$$

(B.56)

B.10 RESULTADO FINAL

Por fim, apresenta-se o resultado final para o problema estudado após a utilização do refinamento k . A configuração utilizada na Análise Isométrica para obtenção dos resultados pode ser visto na FIGURA 114.

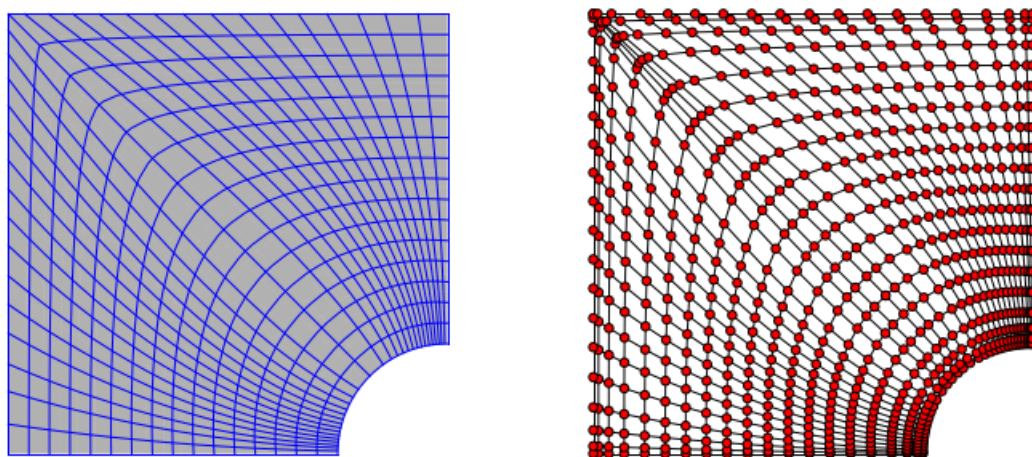


FIGURA 114 – MALHA E PONTOS DE CONTROLE. FUNÇÕES NURBS DE GRAU 4, 760 PONTOS DE CONTROLE, 512 ELEMENTOS.

FONTE: O autor (2017).

Os resultados analíticos e as soluções numéricas podem ser observados nas Figs. 115-119. Nas FIGURAS 115-117 estão plotados os campos de tensões e nas FIGURAS 118-119 estão plotados os campos de deslocamentos. Para esses resultados foram utilizados $p + 1$ e $q + 1$ pontos de Gauss nas direções paramétricas ξ e η , respectivamente.

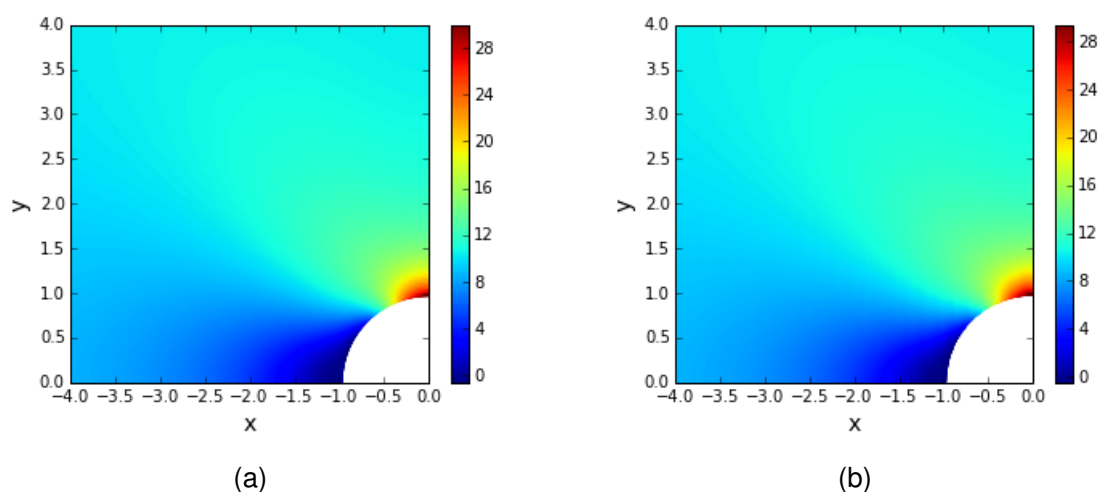


FIGURA 115 – a) SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS TENSÕES NORMAIS NA DIREÇÃO X. b) SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS TENSÕES NORMAIS NA DIREÇÃO X.

FONTE: O autor (2017).

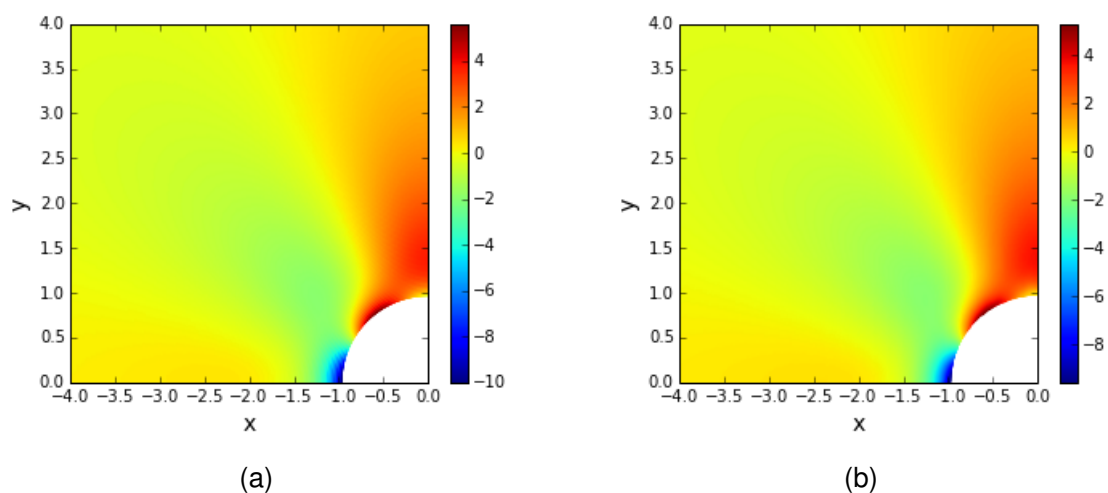


FIGURA 116 – a) SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS TENSÕES NORMAIS NA DIREÇÃO Y. b) SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS TENSÕES NORMAIS NA DIREÇÃO Y.

FONTE: O autor (2017).

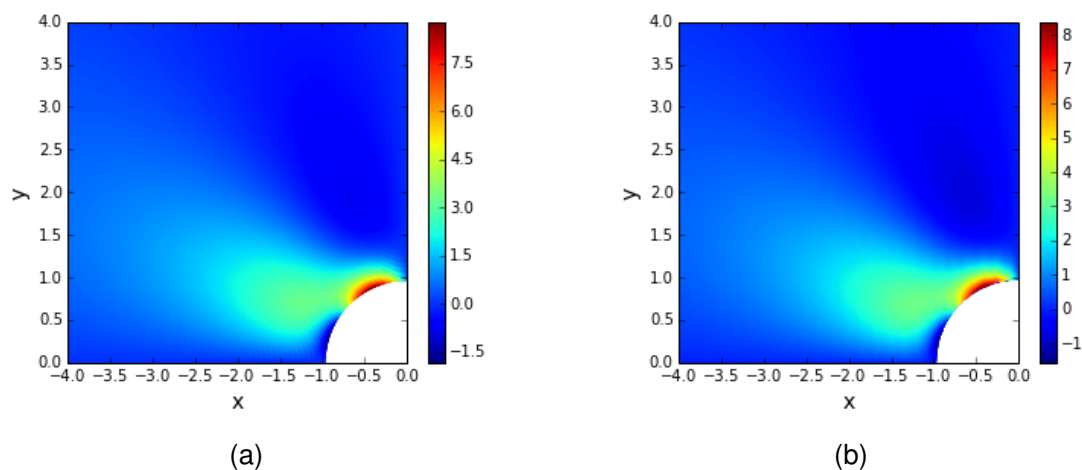


FIGURA 117 – a) SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS TENSÕES TANGENCIAIS NA DIREÇÃO XY. b) SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS TENSÕES TANGENCIAIS NA DIREÇÃO XY.

FONTE: O autor (2017).

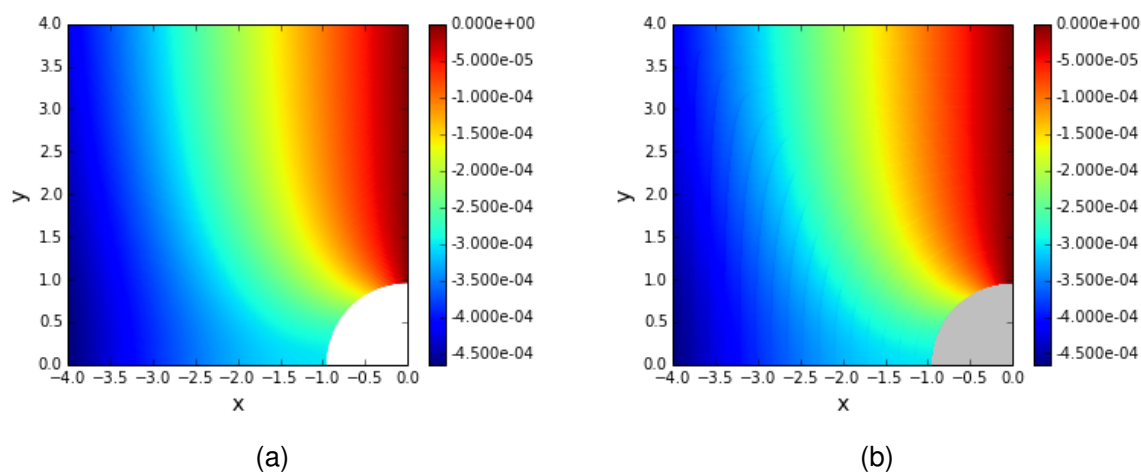


FIGURA 118 – a) SOLUÇÃO ANALÍTICA DOS DESLOCAMENTOS NA DIREÇÃO X. b) SOLUÇÃO NUMÉRICA DOS DESLOCAMENTOS NA DIREÇÃO X.

FONTE: O autor (2017).

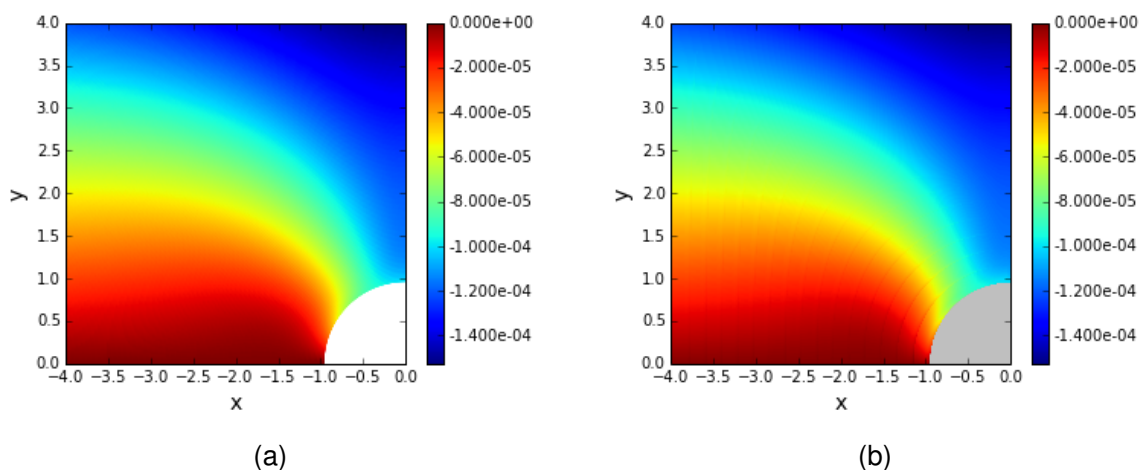


FIGURA 119 – a) SOLUÇÃO ANALÍTICA DOS DESLOCAMENTOS NA DIREÇÃO Y. b) SOLUÇÃO NUMÉRICA DOS DESLOCAMENTOS NA DIREÇÃO Y.
FONTE: O autor (2017).

Logo abaixo, na FIGURA 120 são apresentadas três das funções racionais obtidas, as quais estão plotadas no espaço físico.

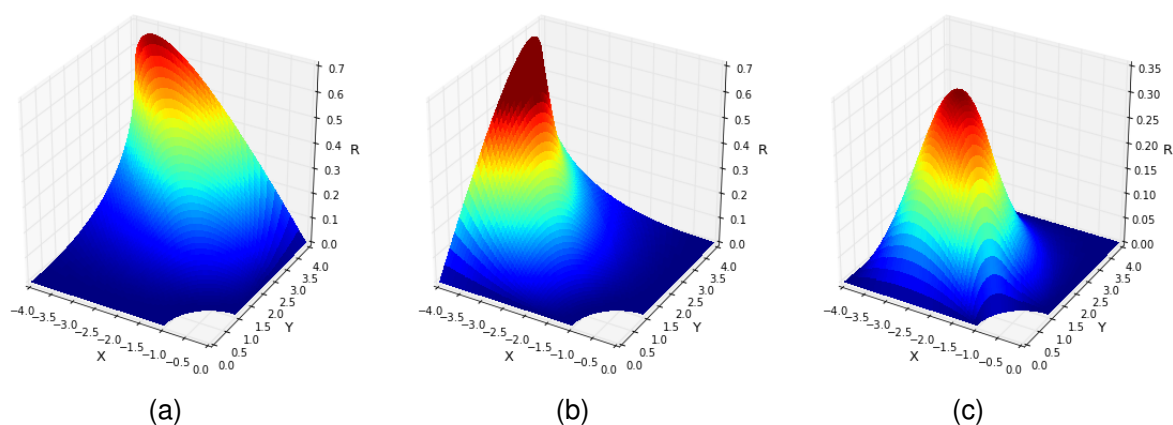


FIGURA 120 – a) FUNÇÃO $\tilde{R}_{3,3}$. b) FUNÇÃO $\tilde{R}_{2,3}$. c) FUNÇÃO $\tilde{R}_{2,2}$.
FONTE: O autor (2017).

APÊNDICE C – RHINO 3D

Para a análise dos problemas da AIG baseada nas T-splines foi utilizado, como recurso, o *software* Rhino 5 em conjunto com o *Autodesk T-Splines Plug-in for Rhino v4*, o qual permite a implementação das T-splines dentro do *software* e a extração dos dados necessários para a análise numérica. Ambos são descritos neste apêndice, assim como, uma demonstração de manuseio do *software* para aplicação na AIG é apresentada aqui.

C.1 RHINO 5

O *software* Rhino 5, segundo Robert Mcneel & Associados (2017), é um modelador 3D que permite a criação, a edição, a análise, a documentação, a renderização, a animação e o translado de curvas NURBS, superfícies NURBS, sólidos NURBS, nuvens de pontos e malhas poligonais.

C.2 AUTODESK T-SPLINES PLUG-IN FOR RHINO V4

Segundo Autodesk Inc. (2013), o *Plug-in* criado para o *software* Rhino, denominado de *Autodesk T-splines Plug-in for Rhino V4*, auxilia projetistas a criarem rapidamente modelos CAD de alta qualidade e com contornos suaves, devido ao uso das T-splines. Além disso, permite a obtenção dos dados necessários, na formatação de dados baseada na extração de Bézier, para aplicação na AIG.

C.3 EXEMPLO DE APLICAÇÃO NA AIG

Nesta seção são descritas algumas etapas para extração dos dados necessárias para o uso na AIG. Muitas das informações aqui expostas foram obtidas em Tspline Inc. (2011).

C.3.1 Conversão de NURBS para T-splines

Primeiramente, cria-se um conjunto de curvas com o uso do comando *Loft*, este conjunto de curvas é transformado em NURBS, e com o uso do comando *Convert NURBS or mesh to T-spline* as NURBS são transformadas em T-splines. Utiliza-se, também, o comando *Insert Point (Exact)* para aplicar o refino na malha. Este procedimento é ilustrado na FIGURA 121.

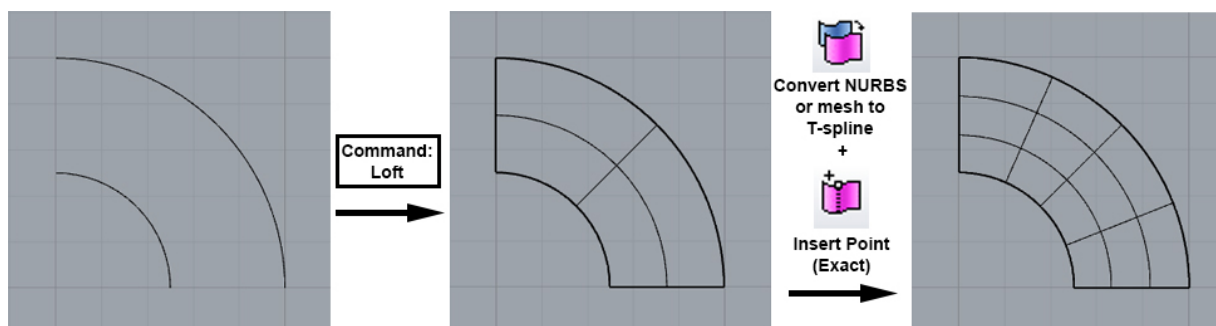


FIGURA 121 – CONVERSÃO DE CURVAS PARA T-SPLINES.
FONTE: O autor (2017).

C.3.2 Pontos de Controle

Com o uso do comando *Points On*, os pontos de controle são exibidos. Uma atenção especial deve ser dada aos chamados *Tangency Handles*, circutados na FIGURA 122. Os *Tangency Handles* controlam a tangência das T-splines nos extremos da superfície, e além disso, quando se observa a T-malha, os *Tangency Handles* são responsáveis pelo surgimento dos Intervalos de nós de valor zero.

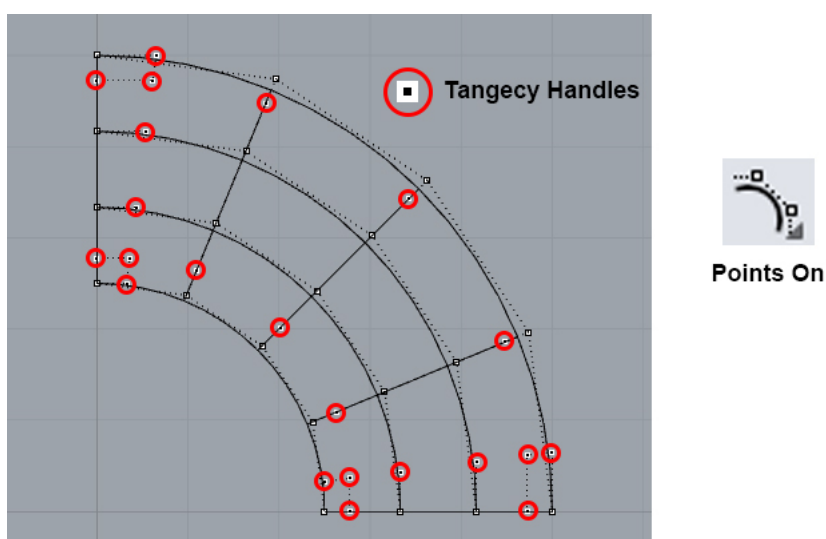


FIGURA 122 – PONTOS DE CONTROLE.
FONTE: O autor (2017).

Na FIGURA 123 pode ser observada a numeração dos pontos de controle, a qual é obtida com a seguinte sequência de comandos: *tsSetDebugFlag/DrawGldx = Yes*.

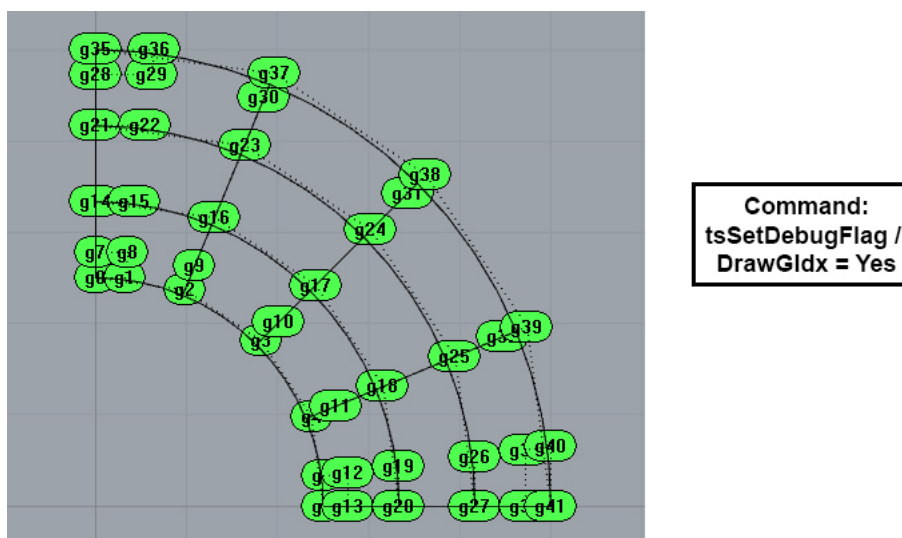


FIGURA 123 – NUMERAÇÃO DOS PONTOS DE CONTROLE.

FONTE: O autor (2017).

C.3.3 Intervalo de nós

Os Intervalos de nós, importantes para a construção dos vetores de nós locais, podem ser observados na FIGURA 124, e obtidos com a seguinte sequência de comandos: *tsMacroUtil/LabelKnots*.

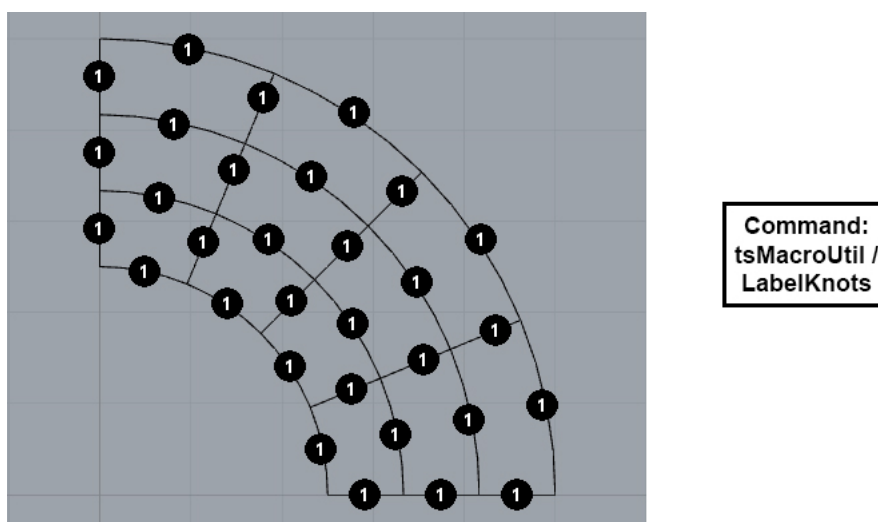


FIGURA 124 – INTERVALO DE NÓS.

FONTE: O autor (2017).

C.3.4 Elementos de Bézier

Com o comando *tsDumpBeziers* é possível a obtenção dos elementos de Bézier associados as T-splines (FIGURA 125).

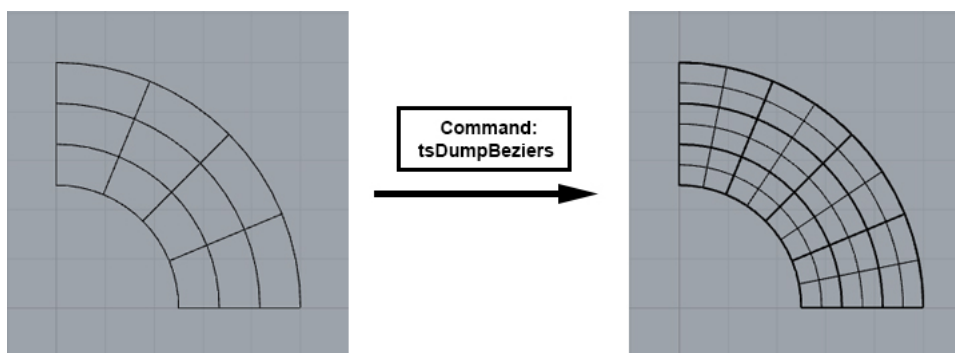


FIGURA 125 – ELEMENTOS DE BÉZIER.
 FONTE: O autor (2017).

Os pontos de controle dos elementos de Bézier também podem ser visualizados, assim como a numeração destes pontos, utilizando-se o comando *Points On* e a sequência de comandos *tsDumpBeziers/DumpExtraction=Yes/NumberPoints=Yes*, como pode ser observado na FIGURA 126 e na FIGURA 127.

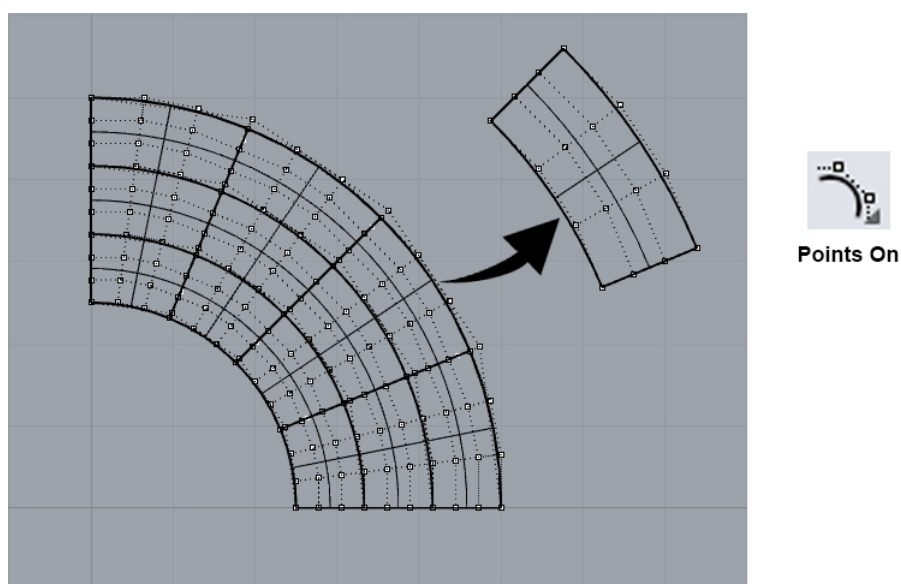


FIGURA 126 – PONTOS DE CONTROLE DOS ELEMENTOS DE BÉZIER.
 FONTE: O autor (2017).

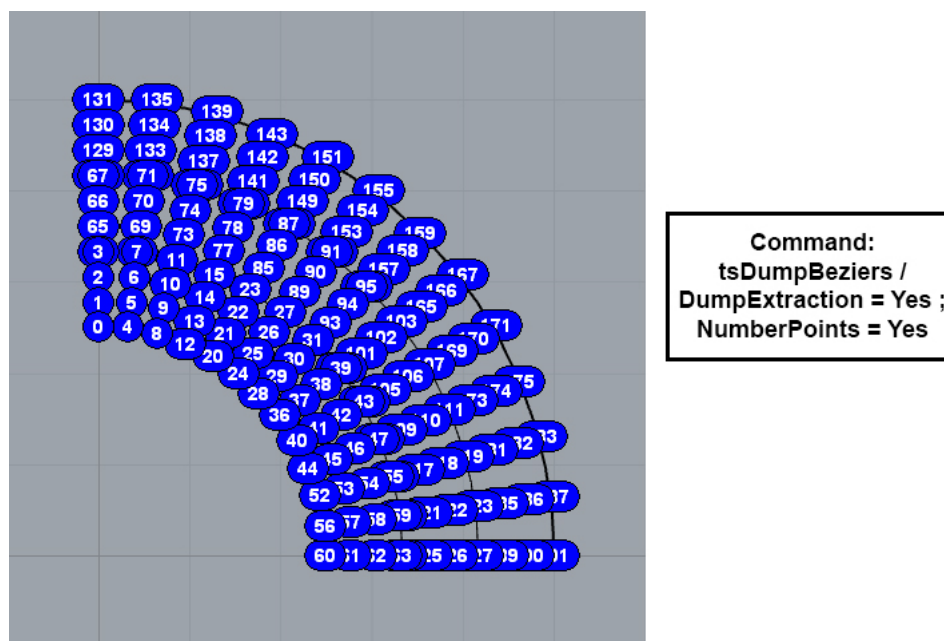


FIGURA 127 – NUMERAÇÃO DOS PONTOS DE CONTROLE DE BÉZIER.
FONTE: O autor (2017).

C.3.5 Arquivo de Saída

O arquivo de saída que contém os dados de entrada para serem utilizados no algoritmo da AIG possui a extensão (*.iga) e é descrito por *T-Splines Isogeometric Analysis Files* (FIGURA 128).

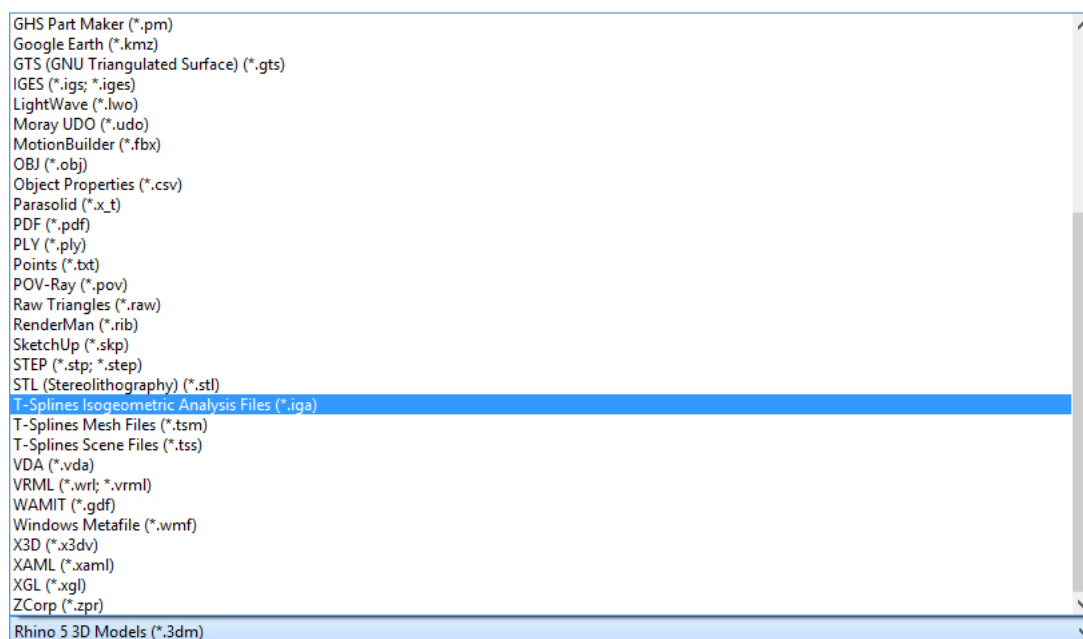


FIGURA 128 – ARQUIVO DE SAÍDA.
FONTE: O autor (2017).

As informações contidas no arquivo de saída foram muito bem explicadas no trabalho de Scott et al. (2013). Na sequência, são transcritas algumas dessas informações.

Como pode ser visto na FIGURA 129, nas primeiras três linhas do arquivo são apresentados:

- *type*: *plane*, caso a superfície seja bidimensional; *surface*, caso a superfície seja tridimensional;
- *nodeN*: número total de pontos de controle;
- *elemN*: número total de elementos de Bézier que definem a superfície T-spline.

type	plane
nodeN	42
elemN	12

FIGURA 129 – DADOS DO ARQUIVO DE SAÍDA: PARTE 1.
FONTE: O autor (2017).

Nas linhas cuja primeira coluna contém o texto *node*, estão as informações referentes aos pontos de controle das T-splines, FIGURA 130. Organizados da seguinte maneira:

- *node x y z w*

sendo x, y, z as coordenadas dos pontos de controle e w o peso associado.

node	-27.724	-7.5	0	1
node	-27.399	-7.5	0	1
node	-26.742	-7.6301	0	1
		.		
		.		
node	-22.985	-8.0349	0	1
node	-22.724	-9.3497	0	1
node	-22.724	-10	0	1

FIGURA 130 – DADOS DO ARQUIVO DE SAÍDA: PARTE 2.
FONTE: O autor (2017).

Na última parte do arquivo de saída estão contidas as informações referentes a estruturação de dados baseada na extração de Bézier. Um exemplo dos dados é apresentado na FIGURA 131.

belem	16	3	3														
0	1	2	3	7	8	9	10	14	15	16	17	21	22	23	24		
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
0	1	0.5	0.25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
0	0	0.5	0.58333	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
0	0	0	0.16667	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
0	0	0	0	1	0	0	0	0.5	0	0	0	0.25	0	0	0		
0	0	0	0	0	1	0.5	0.25	0	0.5	0.25	0.125	0	0.25	0.125	0.0625		
0	0	0	0	0	0	0.5	0.58333	0	0	0.25	0.29167	0	0	0.125	0.14583		
0	0	0	0	0	0	0	0.16667	0	0	0	0.08333	0	0	0	0.04167		
0	0	0	0	0	0	0	0	0.5	0	0	0	0.58333	0	0	0		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5	0.25	0.125	0	0.58333	0.29167	0.14583		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.25	0.29167	0	0	0.29167	0.34028		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.08333	0	0	0	0.09722		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.16667	0	0	0		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.16667	0.08333	0.04167		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.08333	0.09722		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.02778		

FIGURA 131 – DADOS DO ARQUIVO DE SAÍDA: PARTE 3.

FONTE: O autor (2017).

Na primeira linha tem-se os seguintes valores:

- $belem\ n\ p_{\xi}\ p_{\eta}$

onde n é o número de funções base T-spline que são não nulas sobre este elemento e p_{ξ} e p_{η} são os graus dos polinômios de Bernstein nas direções ξ e η , respectivamente.

Na segunda linha estão os índices globais das funções T-splines que são não nulas, os quais compõem a matriz **IEN**, e que são especificadas como:

- $A_1\ A_2\ \dots\ A_a\ \dots\ A_n$

Por último, têm-se as linhas do operador de extração que são dadas como:

$$\begin{array}{cccc}
 c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \bullet\ c_{a1} & c_{a2} & \cdots & c_{am} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm}
 \end{array}$$

onde $m = (p_{\xi} + 1)(p_{\eta} + 1)$ é o número de polinômios de Bernstein definindo o elemento e .

A função T-spline global, validada no domínio auxiliar, é dada por:

- $N_{A_a}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = \sum_{j=1}^m c_{a_j} B_j(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$

- *Sets*

Ainda é possível, com o uso do comando *tsSe/Set*, a criação de um conjunto de seleções. Com ele podem ser definidas seleções referentes aos pontos de controle, aos contornos e aos elementos. Esse procedimento facilita o processo de aplicação das condições de contorno quando essas informações são importadas para dentro de um algoritmo. Um exemplo é visto na FIGURA 132, sendo que a descrição dos campos pode ser encontrada em Scott et al. (2013).

set	7	node	Control_Points	3	7	11	15	18	22	26	
set	4	side	Edges	11	RIGHT	8	RIGHT	9	RIGHT	10	RIGHT
set	4	elem	Faces	8	9	10	11				

FIGURA 132 – DADOS DO ARQUIVO DE SAÍDA: PARTE 4.
FONTE: O autor (2017).